

ANDRÉ CAZAMIAN

**Sur l'hyperbole équilatère et sur ses inverses**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 265-280

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_\\_265\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__265_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ET SUR SES INVERSES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

---

Dans cette Note, nous nous proposons d'établir les propriétés de la strophoïde et de la lemniscate en considérant ces courbes comme les transformées par rayons vecteurs réciproques de l'hyperbole équilatère. Nous donnerons aussi certaines propriétés intéressantes de l'hyperbole elle-même. Enfin, nous étendrons, par inversion, plusieurs propositions à toutes les cycliques unicursales dont les tangentes au point double sont rectangulaires (1).

---

(1) Plusieurs des théorèmes que nous donnerons ont déjà été  
*Ann. de Mathémat.*, 3<sup>e</sup> série, t. XIII. (Juillet 1894.) 20

Quelques remarques préliminaires sont nécessaires.

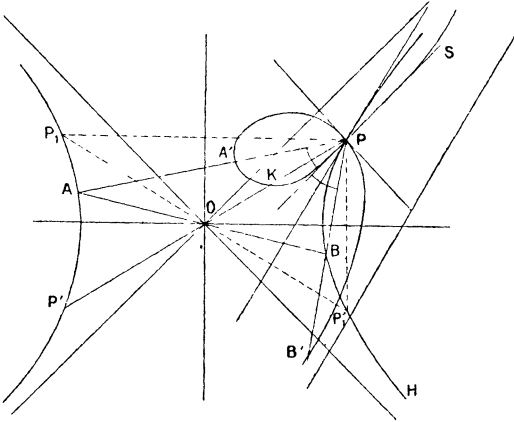
La figure inverse d'une conique par rapport à un point quelconque  $P$  de son plan, étant la polaire relativement à  $P$  de la polaire réciproque, qui est une conique, est une quartique bicirculaire ayant un point double en  $P$ . Les tangentes en ce point double sont les parallèles aux asymptotes de la conique menées par ce point. Si la conique est une ellipse, le point  $P$  est donc toujours un point double isolé; ce point double est réel si la conique est une hyperbole, c'est un point de rebroussement si la conique est une parabole. En adoptant l'expression de *cyclique* pour désigner une quartique bicirculaire, nous pourrions dire que la figure inverse d'une conique, le centre d'inversion étant quelconque dans le plan, est une cyclique unicursale. Si la conique est une hyperbole équilatère, la cyclique aura ses tangentes au point double rectangulaires. Nous l'appellerons une *cyclique équilatère*. Si le centre d'inversion est au centre de l'hyperbole, le point double est, de plus, centre de la cyclique équilatère, qui est alors une lemniscate. Enfin les cycliques inverses de la parabole pourront être appelées des *cycliques cuspidales*. Dans le cas où le centre d'inversion  $P$  est sur la conique, la figure inverse est une cubique circulaire unicursale, dont le point double est  $P$ , les tangentes en ce point étant toujours les parallèles issues de  $P$  aux asymptotes de la conique. Si donc celle-ci est une hyperbole équi-

---

obtenus par M. Balitrand dans deux études analytiques directes (*Nouvelles Annales*, novembre 1893, et *Journal de Math. spéc.*, avril 1891) sur la strophoïde et la lemniscate. Nous aurons soin de signaler les propositions dues à cet auteur. Notre travail montrera qu'il n'était pas utile d'étudier séparément ces deux courbes, les propriétés de l'une et de l'autre se déduisant des propriétés de l'hyperbole équilatère

latère, la figure inverse est une strophoïde : c'est une cissoïde si la conique est une parabole.

Soient  $H$  une hyperbole équilatère de centre  $O$ ,  $P$  un point quelconque de la courbe, que nous prenons pour centre d'inversion (*fig. 1*). Alors les parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par  $P$  sont les tangentes au point double  $P$  de la strophoïde oblique  $S$  in-



verse de  $H$ . La tangente à l'hyperbole équilatère au point  $P$  est parallèle à l'asymptote de  $S$ . Deux points  $A$  et  $B$ , diamétralement opposés sur l'hyperbole, sont tels que les droites  $PA$ ,  $PB$  sont également inclinées sur les asymptotes ; leurs correspondants  $A'$  et  $B'$  sur la strophoïde seront donc tels que les droites les joignant au point double soient également inclinées sur les tangentes au point double ; es deux points seront donc deux points *conjugués* de la strophoïde (points qui ont des paramètres égaux et de signes contraires lorsqu'on rapporte la strophoïde à ses tangentes au point double, et qu'on exprime les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre variable). En particulier, aux

points  $P_1$  et  $P'_1$ , symétriques de  $P$  par rapport aux axes de  $H$ , correspondront les deux points de la strophoïde situés sur les bissectrices des angles des tangentes au point double, et qui sont conjugués (paramètres  $+1$  et  $-1$ ). Au point  $P$  de l'hyperbole équilatère correspond, sur la strophoïde, le point à l'infini sur l'asymptote réelle, et au point  $P'$ , symétrique de  $P$  par rapport au centre  $O$  de l'hyperbole, correspondra le point  $K$  de la strophoïde situé sur la droite symétrique par rapport aux tangentes au point double de la parallèle à l'asymptote menée par le point double. Ce point  $K$  est conjugué du point réel à l'infini de la strophoïde.

Remarquons enfin qu'à un cercle tangent en  $P$  à l'hyperbole correspond une droite parallèle à l'asymptote de la strophoïde, et au cercle osculateur en  $P$  correspond l'asymptote elle-même, de sorte qu'au point de rencontre du cercle osculateur en  $P$  avec l'hyperbole équilatère correspond le point de rencontre de la strophoïde avec son asymptote. A un cercle osculateur en un point autre que  $P$  correspondra le cercle osculateur au point correspondant de la strophoïde.

Nous allons d'abord transformer des propriétés connues de l'hyperbole équilatère.

Le cercle de diamètre  $PP'$  passe par les points  $P_1$  et  $P'_1$ .

Les points de la strophoïde situés sur les bissectrices de l'angle des tangentes au point double sont en ligne droite avec le conjugué du point réel à l'infini.

Les droites  $AB$  passent par le centre de l'hyperbole équilatère, milieu de  $PP'$ .

Les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double d'une strophoïde et deux points conjugués quelconques passent par un point fixe, qui est le milieu de la

Les perpendiculaires en A et B aux droites PA et PB se coupent sur l'hyperbole équilatère.

M étant un point quelconque de l'hyperbole équilatère, les angles MAP, MBP sont égaux.

La tangente en P à l'hyperbole équilatère et la droite PO font des angles égaux avec les droites PA et PB.

Soient P un point fixe d'une hyperbole équilatère, A et B

distance du point double au conjugué du point réel à l'infini (point K).

Les cercles ayant pour diamètres les droites joignant le point double à deux points conjugués se coupent sur la strophoïde.

*Autrement* : La projection du point double sur la droite joignant deux points conjugués appartient à la strophoïde.

La droite joignant un point quelconque M de la strophoïde au point double est bissectrice de l'angle des droites joignant le même point M à deux points conjugués quelconques.

La parallèle à l'asymptote menée par le point double est médiane du triangle formé par le point double et deux points conjugués quelconques <sup>(1)</sup>.

*Autrement* : Le lieu des milieux des cordes joignant deux points conjugués est la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

L'enveloppe des droites joignant deux points conjugués

---

(<sup>1</sup>) Cela résulte de cette proposition : Soient P le centre d'inversion, A et B deux points d'une figure, A' et B' les points correspondants de la figure inverse : la médiane et la symédiane du triangle PAB (issues de P) sont respectivement symédiane et médiane du triangle P A' B'.

les extrémités d'un diamètre quelconque. Le cercle  $\Sigma$  circonscrit au triangle PAB rencontrant l'hyperbole au point D, on sait que le centre du cercle  $\Sigma$  est le milieu de PD, d'où il résulte que l'enveloppe de ces cercles est la podaire de l'hyperbole équilatère relative au point P.

d'une strophoïde est la figure inverse de la podaire d'une hyperbole équilatère relative à un point de la courbe : c'est donc la polaire réciproque d'une hyperbole équilatère, le centre du cercle directeur étant sur l'hyperbole, c'est-à-dire une parabole dont la directrice passe par le point double de la strophoïde.

Pour continuer cette étude de l'hyperbole équilatère et de la strophoïde, nous allons établir certains théorèmes intéressants sur la conique en la considérant comme une courbe unicursale. Rapportée à ses asymptotes, l'hyperbole équilatère a pour équation

$$xy = a^2.$$

En posant  $y = t^2 x$ , on a

$$x^2 = \frac{a^2}{t^2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{t}, \quad \text{et} \quad y = at.$$

Portant ces valeurs à la place de  $x$  et  $y$  dans l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

d'un cercle quelconque du plan, on obtient l'équation

$$a^2 t^4 - 2\beta a t^3 + \gamma t^2 - 2\alpha a t + a^2 = 0,$$

dont les racines vérifient la relation

$$(1) \quad t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

Si le cercle passe par l'origine, c'est-à-dire par le centre de l'hyperbole équilatère, on a  $\gamma = 0$ , et les racines de l'équation vérifient en outre la relation

$$(2) \quad \Sigma t_1 t_2 = 0.$$

Les relations (1) et (2) vont nous permettre d'énon-

cer un grand nombre de théorèmes sur les systèmes de cercles et d'hyperbole équilatère. Les démonstrations sont pour la plupart si simples que nous les laisserons de côté, nous contentant d'énoncer les propositions et de les transformer à mesure par rayons vecteurs réciproques, le centre d'inversion étant sur l'hyperbole.

Si quatre points d'une hyperbole équilatère sont sur un cercle, les points diamétralement opposés sont également sur un cercle.

Si quatre points d'une strophoïde sont sur un cercle, leurs conjugués sont également sur un cercle.

Si quatre points d'une hyperbole équilatère sont sur un cercle, deux de ces points et les points diamétralement opposés aux deux autres sont également sur un cercle.

Si quatre points d'une strophoïde sont sur un cercle, deux de ces points et les conjugués des deux autres sont également sur un cercle.

Plaçons le centre d'inversion en l'un des points d'intersection du cercle avec l'hyperbole équilatère, la seconde proposition devient :

*Si trois points d'une strophoïde sont en ligne droite, l'un d'eux et les conjugués des deux autres sont également en ligne droite.*

La première proposition fournit encore cette propriété de trois points en ligne droite sur la strophoïde :

*Si trois points d'une strophoïde sont en ligne droite, leurs conjugués forment un triangle tel que le cercle circonscrit à ce triangle passe par un point fixe, qui est le conjugué du point réel à l'infini (1).*

---

(1) C'est le point de paramètre  $+e$  lorsqu'on prend pour équation de la strophoïde  $(y + cx)(x^2 + y^2) = axy$  et non le point de paramètre 1, comme l'indique à tort M. Balitrand (*loc. cit.*, p. 438). L'adjonction à certains groupes de points des points de paramètres



Par deux points pris sur une hyperbole équilatère on peut mener deux cercles tangents à l'hyperbole; les points de contact sont diamétralement opposés.

Désignons par P et M les deux points pris sur l'hyperbole, nous placerons dans le théorème suivant le centre d'inversion au point P.

Si par deux points quelconques P et M d'une hyperbole équilatère on mène les deux cercles  $\omega$  et  $\omega'$  tangents à l'hyperbole, en désignant par A et B les points de contact :

- 1° Les deux points A et B sont diamétralement opposés;
- 2° Les deux cercles  $\omega$  et  $\omega'$  sont égaux;
- 3° Le cercle  $\Omega$  circonscrit au triangle PAB passe par le point diamétralement opposé au point M, et il est égal aux cercles  $\omega$  et  $\omega'$ ;
- 4° Le cercle MAB passe par le point diamétralement opposé au point P.

Par deux points pris sur une strophoïde on peut mener deux cercles tangents à la courbe; les points de contact sont conjugués (Balitrand).

Si par un point M d'une strophoïde on mène les deux tangentes MA, MB à la courbe :

- 1° Les deux points de contact sont conjugués; *autrement* : les tangentes en deux points conjugués se coupent sur la strophoïde;
- 2° Les deux tangentes MA, MB sont à égale distance du point double;
- 3° La corde polaire AB rencontre la strophoïde au point conjugué du point M (on sait d'autre part que ce point de rencontre est la projection du point double sur AB) et elle est à la même distance du

---

+1 et -1 a conduit cet auteur, dans son étude analytique de la strophoïde, à des conclusions erronées, que nous signalerons. Nous allons montrer par un exemple que la considération de ces points conduit à des résultats inexacts. On trouve (p. 431) que les paramètres  $t_1, t_2, t_3, t_4$  de quatre points situés sur un cercle vérifient la relation  $t_1 t_2 t_3 t_4 = c$ , et les paramètres de trois points en ligne droite vérifient la relation  $\theta_1 \theta_2 \theta_3 = -c$ . Adjoignons à ces trois derniers points le point  $\theta_4$  de paramètre  $-1$ , nous aurons  $\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 = c$ . On déduirait donc de là que trois points en ligne droite sont situés sur un cercle passant par le point  $(-1)$ .

point double que les droites MA, MB. Il résulte de là que le point double est le centre du cercle inscrit au triangle MAB, le point de contact du cercle avec AB étant conjugué de M (*Journal de Math. spéc.*, 1887; p. 269);

4° Le cercle MAB passe par un point fixe, qui est le conjugué du point réel à l'infini.

Par un point pris sur une hyperbole équilatère, on peut mener trois cercles osculateurs, l'un réel, les deux autres imaginaires. Le point fixe, les points d'osculation sont situés sur un cercle (c'est le théorème de Steiner) (2). Ce cercle passe par le centre de l'hyperbole.

Deux cercles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  rencontrant une hyperbole équilatère respectivement aux points (A, B, C, D), (A', B', C', D'), on mène le cercle passant en A et tangent à l'hyperbole en A', le cercle passant en B et tangent à l'hyperbole en B', ..., les quatre cercles ainsi obtenus rencontrent de nouveau l'hyperbole en quatre points qui sont situés sur un même cercle.

Par un point pris sur la strophoïde, on peut faire passer trois cercles osculateurs à cette courbe; l'un est réel, les deux autres imaginaires. Le point fixe et les points d'osculation sont sur un cercle (Balitrand).

Ce cercle passe par un point fixe (le milieu de la distance du point double au conjugué du point réel à l'infini).

Deux cercles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  rencontrant une strophoïde respectivement aux points (A, B, C, D), (A', B', C', D'), on mène le cercle passant en A et tangent à la strophoïde en A', le cercle passant en B et tangent à la strophoïde en B', ..., les quatre cercles ainsi obtenus rencontrent de nouveau la strophoïde en quatre points situés sur un même cercle.

---

(1) Voir la Note qui termine notre étude.

Plaçons le centre d'inversion au point A, nous aurons la proposition suivante :

*Soient B, C, D les points de rencontre d'une droite quelconque avec une strophoïde, A', B', C', D' les points d'intersection d'un cercle quelconque avec la même courbe. Les points de rencontre avec la strophoïde de la tangente en A' et des cercles passant par les points B', C', D' et tangents respectivement à la courbe aux points B, C, D sont sur un même cercle.*

Si dans la proposition précédente on suppose les deux cercles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  confondus, on obtient le théorème suivant :

<p>Les cercles osculateurs à une hyperbole équilatère en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau l'hyperbole en quatre points situés sur un cercle.</p>	<p>Les cercles osculateurs à une strophoïde en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la strophoïde en quatre points situés sur un cercle (Balitrand).</p>
---	---

Plaçons le centre d'inversion en l'un des points de rencontre du cercle avec l'hyperbole équilatère, nous aurons le théorème suivant :

*Les cercles osculateurs à une strophoïde en trois points en ligne droite rencontrent de nouveau la strophoïde en trois points : le cercle passant par ces trois points passe par un point fixe, qui est le point où la strophoïde rencontre son asymptote (1).*

<p>Si l'on coupe une hyperbole équilatère par un cercle quelconque, que par deux des points d'intersection on fasse</p>	<p>Théorème identique sur la strophoïde (Balitrand).</p>
---	--

---

(1) Le théorème énoncé par M. Balitrand (*loc. cit.*, p. 437) n'est pas exact.

passer un cercle, et par les deux autres un second cercle, les deux nouveaux cercles coupent l'hyperbole équilatère en quatre points situés sur un cercle (1).

Soient P un point d'une hyperbole équilatère, A, B, C, D les points d'intersection d'un cercle avec l'hyperbole. Les quatre cercles passant en P et touchant l'hyperbole respectivement aux points A, B, C, D rencontrent de nouveau l'hyperbole en quatre points situés sur un cercle.

Les cercles osculateurs à une hyperbole équilatère en deux points diamétralement opposés rencontrent de nouveau l'hyperbole en deux points diamétralement opposés.

Soient P un point d'une hyperbole équilatère, (A, B), (A', B') deux couples quelconques de points diamétralement opposés. Les cercles (PAB'), (PA'B) se coupent en I sur l'hyperbole équilatère. De même les cercles (PAA'), (PBB') se coupent en I' sur l'hyperbole équilatère. Les points I et I' sont diamétralement opposés. Les quatre cercles sont égaux.

Les tangentes à une strophoïde en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la strophoïde en quatre points situés sur un cercle (Balitrand).

Les cercles osculateurs à une strophoïde en deux points conjugués rencontrent de nouveau la strophoïde en deux points conjugués (Balitrand).

Soient (A, B), (A', B') deux couples quelconques de points conjugués d'une strophoïde. Les droites AB' et A'B se coupent en I sur la strophoïde. Les droites AA', BB' se coupent de même en I' sur la strophoïde. Les points I et I' sont conjugués. Les quatre droites AB', A'B, AA', BB' sont à la même distance du point double.

On déduit de là cet énoncé de M. Balitrand : Tout qua-

---

(1) Le théorème est vrai pour une conique quelconque (voir la Note qui termine notre étude).

drilatère complet inscrit à la strophoïde est un quadrilatère conjugué inscrit.

Par un point d'une hyperbole équilatère on peut mener quatre cercles passant par le centre de l'hyperbole et tangents à la courbe. Les quatre points de contact sont sur un même cercle passant par le centre de l'hyperbole.

Par un point quelconque d'une strophoïde et le point R milieu de la distance du point double au conjugué du point réel à l'infini on peut mener quatre cercles tangents à la strophoïde. Les points de contact sont sur un même cercle passant par R.

Plaçons le centre d'inversion au point considéré de l'hyperbole équilatère, nous avons ce théorème :

*Par le point R, milieu de la distance du point double d'une strophoïde au conjugué du point réel à l'infini (1), on peut mener à la strophoïde quatre tangentes, dont les points de contact sont sur un même cercle passant par R.*

On voit par les exemples précédents quelle quantité considérable de théorèmes on peut énoncer sur la strophoïde en transformant par rayons vecteurs réciproques les propriétés de l'hyperbole équilatère, le centre d'in-

(1) C'est le point fixe par lequel passent tous les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double et deux points conjugués quelconques. L'équation de la strophoïde étant

$$(y + cx)(x^2 + y^2) = axy,$$

ce point R a pour coordonnées

$$x = \frac{a}{4(1+c)}, \quad y = \frac{ac}{4(1+c^2)}.$$

Il est situé sur la droite symétrique par rapport aux tangentes au point double de la parallèle à l'asymptote menée par le point double. C'est la droite que M. Balitrand a appelée l'axe de la strophoïde.

version étant placé en un point pris à volonté sur l'hyperbole.

*Propriétés de la lemniscate.* — Si le centre d'inversion est placé au centre de l'hyperbole équilatère, la courbe inverse est une lemniscate. En transformant les propriétés énoncées plus haut sur l'hyperbole équilatère, on obtiendra notamment tous les théorèmes donnés par M. Balitrand dans son étude sur la lemniscate (*Journal de Math. spéc.*, avril 1891).

*Propriétés des cycliques équilatères.* — Enfin, si le centre d'inversion est quelconque dans le plan, on pourra énoncer des propriétés communes à toutes les cycliques équilatères. Voici les plus remarquables :

*Les cercles osculateurs à une cyclique équilatère en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un cercle.*

*Deux cercles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  rencontrant une cyclique équilatère respectivement aux points (A, B, C, D), (A', B', C', D'), si l'on mène le cercle passant en A et tangent à la cyclique en A', le cercle passant en B et tangent à la cyclique en B', . . . , les quatre cercles ainsi obtenus rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un cercle.*

*Soient M un point d'une cyclique équilatère, A, B, C, D les points d'intersection d'un cercle avec la cyclique. Les quatre cercles passant en M et touchant la cyclique respectivement aux points A, B, C, D rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un cercle.*

*Par un point M pris sur une cyclique équilatère, on peut mener trois cercles osculateurs à la cyclique, l'un est réel, les deux autres imaginaires. Les trois points d'os-*

*culation et le point M sont situés sur un même cercle, qui passe par un point fixe du plan, indépendant de la position du point M.*

Ce point fixe joue un rôle important dans la géométrie des cycliques équilatères. C'est le point qui correspond, dans l'inversion, au centre de l'hyperbole équilatère. Nous le désignerons dans les théorèmes suivants par la lettre  $\omega$ .

*Par deux points pris sur une cyclique équilatère on peut mener deux cercles tangents à la cyclique. Les points de contact, le point double et le point  $\omega$  sont sur un même cercle.*

*Par un point d'une cyclique équilatère et le point  $\omega$  on peut mener quatre cercles tangents à la cyclique. Les quatre points de contact sont sur un même cercle passant par le point  $\omega$ .*

*Soient A, B, C, D quatre points d'une cyclique équilatère situés sur un cercle, et O le point double. Si l'on trace les cercles circonscrits aux triangles  $(OA\omega, OB\omega, \dots)$ , ces cercles rencontrent la cyclique en quatre nouveaux points qui sont situés sur un même cercle.*

*Si quatre points d'une cyclique équilatère sont sur un cercle, deux de ces points et les points de rencontre avec la cyclique des cercles passant par le point double, le point  $\omega$  et chacun des deux autres points sont également sur un cercle.*

A deux points diamétralement opposés de l'hyperbole équilatère, il suffit de faire correspondre, comme on le voit, les deux points de rencontre avec la cyclique équilatère d'un cercle passant par son point double et le point  $\omega$ .

En terminant, citons encore ce théorème :

*Un cercle passant par le point double et le point  $\omega$  rencontre la cyclique en deux points. Les cercles osculateurs en ces points rencontrent de nouveau la cyclique en deux points situés avec le point double et le point  $\omega$  sur un même cercle.*

NOTE.

Quelques-uns des théorèmes que nous avons énoncés sur l'hyperbole équilatère s'appliquent à une conique quelconque. En les transformant par inversion, on obtiendra des propriétés relatives aux cubiques circulaires unicursales quelconques et aux cycliques unicursales quelconques.

Transformons par, exemple, le théorème de Steiner sur les cercles osculateurs que l'on peut mener à une conique par un point M pris sur la courbe. On obtiendra trois propositions différentes :

1<sup>o</sup> Le centre d'inversion est en M : *Les trois points d'inflexion d'une cubique circulaire unicursale sont en ligne droite* (théorème bien connu, et vrai pour une cubique unicursale non circulaire);

2<sup>o</sup> Le centre d'inversion est un point de la conique autre que M : *Par un point P pris sur une cubique circulaire unicursale on peut mener trois cercles osculateurs à la cubique. Les trois points d'osculation et le point M sont sur un même cercle.*

3<sup>o</sup> Le centre d'inversion est quelconque dans le plan : *Par un point P pris sur une cyclique unicursale on peut mener trois cercles osculateurs à la cyclique. Le point P et les points d'osculation sont sur un même cercle.*

En transformant de nouveau par inversion, le théo-



rème s'appliquera à des courbes de degré de plus en plus élevé et pourra recevoir une extension indéfinie.

Voici un autre théorème qui s'applique à une conique quelconque. On sait que les cordes d'intersection d'un cercle et d'une conique sont également inclinées sur les axes, et que, réciproquement, si deux droites sont également inclinées sur les axes d'une conique, on peut faire passer un cercle par leurs points d'intersection avec la conique. Donc :

*Si l'on coupe une conique par un cercle, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la conique en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Transformons par inversion. Nous obtiendrons encore trois propositions différentes :

1° Le centre d'inversion est en l'un des points d'intersection du cercle avec la conique :

*Si l'on coupe une cubique circulaire unicursale par une droite quelconque, si par deux des points d'intersection on fait passer un cercle, et par le troisième on mène une droite quelconque, le cercle et la droite coupent la cubique en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

2° et 3° Le centre d'inversion est un point quelconque de la conique ou du plan :

*Si l'on coupe une  $\left\{ \begin{array}{l} \text{cubique circulaire unicursale} \\ \text{cyclique unicursale} \end{array} \right\}$  par un cercle, que par deux des points d'intersection on fasse passer un cercle, et par les deux autres un autre cercle, les deux nouveaux cercles coupent la courbe en quatre nouveaux points situés sur un cercle.*

Le théorème pourrait réunir une extension indéfinie.