GENTY

Solution, par la géométrie vectorielle, de la question proposée au concours général de 1892 pour la classe de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 235-242

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__235_1>

SOLUTION, PAR LA GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GENERAL DE 1892 POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPECIALES;

PAR M. GENTY.

Soient Q *une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné* E *et* A *le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan* P *de la courbe de contact des deux surfaces :*

1° *Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *homofocales avec l'ellipsoïde* E *et telles que les plans polaires* P_1, P_2, P_3 *du point* A *par rapport aux quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *passent par le centre de la quadrique* Q.

2° *Les plans* P_1, P_2, P_3 *sont les plans principaux de la quadrique* Q, *et les coniques* C_1, C_2, C_3 *intersections des surfaces* (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3) *sont les focales de cette quadrique.*

3° *Les projections orthogonales des coniques* C_1, C_2, C_3 *sur les plans principaux de l'ellipsoïde* E *sont des coniques homofocales.*

On projettera, en particulier, ces coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit *par le foyer des coniques projetées, quand la quadrique* Q *varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan* P *de la courbe de contact ne changeant pas.*

Soient

$$S\rho\varphi^{-1}\rho = 1,$$

l'équation de l'ellipsoïde E et α le vecteur du point A.

L'équation de la quadrique Q sera

$$S\rho\varphi^{-1}\rho - 1 + l(S\rho\varphi^{-1}\alpha - 1)^2 = 0$$

ou

$$S\rho\Phi\rho - 2lS\rho\varphi^{-1}\alpha + l - 1 = 0,$$

en posant

$$\Phi\rho = \varphi^{-1}\rho + l\varphi^{-1}\alpha S\rho\varphi^{-1}\alpha.$$

Le vecteur du centre C de cette quadrique est

$$\gamma = m\alpha,$$

où l'on a posé

$$m = \frac{l}{1 + lS\alpha\varphi^{-1}\alpha}.$$

1° Une quadrique quelconque homofocale avec l'ellipsoïde E a pour équation

$$S\rho(\varphi - k)^{-1}\rho = 1.$$

Le plan polaire du point A par rapport à cette quadrique a pour équation

$$S\rho(\varphi - k)^{-1}\alpha = 1,$$

et, pour que ce plan passe par le point C, il faut qu'on ait

(1) $$mS\alpha(\varphi - k)^{-1}\alpha = 1,$$

équation du troisième degré en k.

On reconnaît facilement que les trois racines de cette équation sont réelles. Au surplus, si m est positif, l'équation (1) donne les trois surfaces homofocales avec l'ellipsoïde E qui passent par le point ayant pour vecteur $\sqrt{m}\alpha$. Si m est négatif, les trois quadriques Q_1, Q_2 et Q_3 sont encore réelles, mais elles n'ont aucun point commun réel.

2° Soient k_1, k_2 et k_3 les racines de l'équation (1); le plan P_1 aura pour équation

$$S\rho(\varphi - k_1)^{-1}\alpha = 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi - k_1)^{-1}\alpha &= \varphi^{-1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha + l\varphi^{-1}\alpha S\alpha\varphi^{-1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha \\ &= \frac{1}{k_1}[(\varphi - k_1)^{-1}\alpha - \varphi^{-1}\alpha] \\ &\quad + \frac{l}{k_1}\varphi^{-1}\alpha[S\alpha(\varphi - k)^{-1}\alpha - S\alpha\varphi^{-1}\alpha],\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$\Phi(\varphi - k_1)^{-1}\alpha = \frac{1}{k_1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha.$$

On trouvera de même

$$\Phi(\varphi - k_2)^{-1}\alpha = \frac{1}{k_2}(\varphi - k_2)^{-1}\alpha,$$

$$\Phi(\varphi - k_3)^{-1}\alpha = \frac{1}{k_3}(\varphi - k_3)^{-1}\alpha.$$

Donc les plans P_1, P_2 et P_3 sont les plans principaux de la quadrique Q, et si l'on désigne par ξ, η et ζ les orienteurs des axes de cette quadrique, et si l'on prend le centre C pour origine, son équation pourra se mettre sous la forme

$$\frac{S^2\rho\xi}{k_1} + \frac{S^2\rho\eta}{k_2} + \frac{S^2\rho\zeta}{k_3} = 1 - m.$$

Dans le cas particulier où la quadrique Q se confond avec le cône circonscrit ayant son sommet au point A, on retrouve ce théorème bien connu :

Les axes de figure d'un cône circonscrit à un ellipsoïde sont les normales aux trois surfaces homofo-

cales avec cet ellipsoïde qui passent par le sommet du cône.

Le point C étant pris pour origine, le plan P_1 a pour équation

$$S\rho\xi = 0 \qquad \text{ou} \qquad S\rho(\varphi - k)^{-1}\alpha = 0,$$

et la conique C_1, intersection des surfaces P_1 et Q_1 a elle-même pour seconde équation

$$S\rho(\varphi - k)^{-1}\rho = 1 - m,$$

ou

$$(2) \quad S\rho\eta S\rho(\varphi - k_1)^{-1}\eta + S\rho\zeta S\rho(\varphi - k_1)^{-1}\zeta = 1 - m.$$

Or, si l'on pose

$$\begin{aligned} T^2(\varphi - k_1)^{-1}\alpha &= a_1^2, \\ T^2(\varphi - k_2)^{-1}\alpha &= b_1^2, \\ T^2(\varphi - k_3)^{-1}\alpha &= c_1^2, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} (\varphi - k_1)^{-1}\eta &= \frac{1}{b_1}(\varphi - k_1)^{-1}\alpha(\varphi - k_2)^{-1}\alpha \\ &= \frac{1}{b_1(k_1 - k_2)}(b_1\eta - a_1\xi), \end{aligned}$$

et de même

$$(\varphi - k_1)^{-1}\zeta = \frac{1}{c_1(k_1 - k_3)}(c_1\zeta - a_1\xi).$$

L'équation (2) devient alors

$$\frac{S^2\rho\eta}{k_2 - k_1} + \frac{S^2\rho\zeta}{k_3 - k_1} = 1 - m;$$

c'est précisément l'équation d'une conique focale de la quadrique Q.

Dans le cas particulier déjà considéré ci-dessus, on retrouve ce théorème de Chasles :

Les lignes focales d'un cône circonscrit à un ellipsoïde sont les génératrices de l'hyperboloïde réglé ho-

mofocal avec l'ellipsoïde qui passe par le sommet du cône.

3° On sait que les projections orthogonales des trois coniques focales d'une quadrique sur un plan quelconque sont des coniques homofocales. Nous allons établir directement cette proposition en prenant pour plan de projection le plan

$$S\nu\rho = 0,$$

mené par le point C parallèlement au plan principal de l'ellipsoïde E qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de cette surface. Soient λ et μ les orienteurs de ces deux axes.

Si dans les équations de la conique C on remplace ρ par $\rho + t\nu$, et qu'on élimine t, il vient

$$\frac{S^2\rho\nu\xi}{k_2 - k_1} + \frac{S^2\rho\nu\eta}{k_3 - k_1} = (1 - m)S^2\nu\xi;$$

c'est l'équation de la projection C'_1 de la conique C_1 sur le plan considéré.

On obtiendrait les projections C'_2 et C'_3 des coniques C_2 et C_3 sur ce même plan, par une permutation tournante entre les vecteurs ξ, η, ζ et les scalaires k_1, k_2 et k_3.

Nous allons chercher les foyers de la conique C'_1.

Écrivons son équation sous la forme

$$S\rho\psi\rho = L,$$

en posant

$$\psi\rho = \frac{S\rho\nu\zeta}{k_2 - k_1} V\nu\zeta + \frac{S\rho\nu\eta}{k_3 - k_1} V\nu\eta,$$

$$L = (1 - m)S^2\nu\xi,$$

et soit ϖ le vecteur d'un foyer F de cette conique.

L'équation des tangentes menées du point F à la conique, ce point étant pris pour origine, sera

$$S\rho\psi\rho(S\varpi\psi\varpi - L) = S^2\rho\psi\varpi,$$

et, pour que F soit un foyer, il faut que cette équation soit vérifiée quand on remplace ρ par $\lambda \pm i\mu$, ce qui donne les deux conditions

$$\begin{aligned} &(S\varpi\psi\varpi - L)(S\lambda\psi\lambda - S\mu\psi\mu) = S^2\lambda\psi\varpi - S^2\mu\psi\varpi, \\ (4)\qquad &(S\varpi\psi\varpi - L)S\lambda\psi\mu = S\lambda\psi\varpi S\lambda\psi\varpi. \end{aligned}$$

Multiplions la première équation par $S\lambda\psi\mu$, la seconde par $S\lambda\psi\lambda - S\mu\psi\mu$, et retranchons-les membre à membre, il vient

$$S\lambda\psi\mu(S^2\lambda\psi\varpi - S^2\mu\psi\varpi) = (S\lambda\psi\lambda - S\mu\psi\mu)S\lambda\psi\varpi S\mu\psi\varpi,$$

équation qu'on ramène très simplement à la forme

$$(5)\qquad S\nu\varpi\psi\varpi = 0.$$

L'équation (4) peut elle-même s'écrire sous la forme

$$(6)\qquad SV\varpi\lambda V\psi\mu\psi\nu = (1 - m)S^2\nu\xi S\lambda\psi\mu.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \psi\varpi &= \frac{S\varpi\nu\zeta}{k_2 - k_1}V\nu\zeta + \frac{S\varpi\nu\eta}{k_3 - k_1}V\nu\eta, \\ \psi\mu &= \frac{S\lambda\zeta}{k_2 - k_1}V\nu\zeta + \frac{S\lambda\eta}{k_3 - k_1}V\nu\eta. \\ V\nu\psi\varpi &= \frac{S\varpi\nu\zeta}{k_2 - k_1}(\nu S\zeta\nu - \zeta) + \frac{S\varpi\nu\eta}{k_3 - k_1}(\nu S\eta\nu - \eta), \\ V\psi\varpi\psi\mu &= \frac{S^1\varpi\lambda S^2\nu\xi}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)}\nu. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces relations, les équations (5) et (6) deviennent

$$\begin{gathered} k_1 S\varpi\nu\zeta S\varpi\xi + k_2 S\varpi\nu\eta S\varpi\eta + k_3 S\varpi\nu\zeta S\varpi\zeta = 0, \\ S\varpi\lambda S\varpi\mu = (1 - m)(k_1 S\lambda\xi S\mu\xi + k_2 S\lambda\eta S\mu\eta + k_3 S\lambda\zeta S\mu\zeta). \end{gathered}$$

La symétrie de ces équations montre que les trois coniques C'_1, C'_2, C'_3 sont bien homofocales.

On a d'ailleurs

$$k_1\xi = \Phi^{-1}\xi, \qquad k_2\eta = \Phi^{-1}\eta, \qquad k_3\zeta = \Phi^{-1}\zeta;$$

et les équations aux foyers deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} S\varpi\nu\Phi^{-1}\varpi = 0, \\ S\varpi\lambda\, S\varpi\mu = (1-m) S\lambda\,\Phi^{-1}\mu. \end{cases}$$

Or il est facile de trouver l'expression de Φ^{-1}. Posons, en effet,

$$\Phi\rho = \varphi^{-1}\rho + l\varphi^{-1}\alpha S\rho\varphi^{-1}\alpha = \sigma,$$

il viendra

$$\rho = \Phi^{-1}\sigma = \varphi\sigma - l\alpha S\rho\varphi^{-1}\alpha,$$

ou, en projetant avec $\varphi^{-1}\alpha$,

$$S\rho\varphi^{-1}\alpha = S\alpha\sigma - lS\rho\varphi^{-1}\alpha S\alpha\varphi^{-1}\alpha;$$

d'où

$$S\rho\varphi^{-1}\alpha = mS\alpha\sigma,$$

et, par suite,

$$\Phi^{-1}\sigma = \varphi\sigma - m\alpha S\alpha\sigma.$$

Si alors on désigne par x et y les coordonnées courantes dans le plan principal de l'ellipsoïde E, par x', y' les coordonnées de la projection A_1 du point A sur ce plan et par a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, on aura

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\varpi &= a^2 x\lambda + b^2 y\mu + c^2 z\nu - mS\alpha\varpi(x'\lambda + y'\mu + z'\nu), \\ \Phi^{-1}\lambda &= a^2\lambda - mx'\alpha, \\ S\mu\Phi^{-1}\lambda &= -mx'y', \end{aligned}$$

et les équations (7) prennent la forme

$$\begin{gathered} (a^2 - b^2)xy = m(xx' + yy')(x'y - y'x), \\ xy = (m^2 - m)x'y', \end{gathered}$$

ou, en revenant à l'origine primitive,

$$(8)\qquad \begin{cases} (a^2 - b^2)(x - mx')(y - my') \\ \quad = m(x'y - y'x)[x'(x - mx') + y'(y - my')], \\ xy - m(xy' + x'y - x'y') = 0. \end{cases}$$

De la seconde équation on déduit

$$m = \frac{xy}{xy' + x'y - x'y'},$$

d'où

$$x - mx' = \frac{xy'(x - x')}{xy' + x'y - x'y'},$$

$$y - my' = \frac{x'y(y - y')}{xy' + x'y - x'y'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), il vient pour l'équation du lieu des foyers

$$(a^2 - b^2)(x - x')(y - y')$$
$$= (x'y - y'x)[x(x - x') + y(y - y')];$$

équation d'une strophoïde ayant le point A_1 pour point double.