NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Problème sur le frottement

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 230-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__230_1>

PROBLÈME SUR LE FROTTEMENT;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Le problème suivant, quoique fort simple, offre quelque intérêt parce qu'on peut le discuter plus complètement que bien des problèmes relatifs au frottement : une application numérique en a été proposée comme question de licence à Marseille en 1892.

Dans un plan vertical, un disque circulaire, pesant et homogène, repose sur une horizontale fixe OX qu'il touche au point A ; une barre pesante OD, parfaitement mobile autour de son extrémité O, appuie sur le disque, qu'elle touche au point B ; les coefficients de frottement du disque sur OX et sur OD, au départ comme en cas de glissement, ont une même valeur f. Déterminer la valeur minimum que peut atteindre f sans que le système cesse d'être en équilibre ; chercher ensuite, pour les diverses valeurs de f inférieures à ce minimum, de quelle manière le disque, maintenu d'abord en repos, puis abandonné en liberté, commencerait à se mouvoir.

Pour embrasser tous les cas, écrivons les équations propres à déterminer, d'une manière générale, le mouvement du système. Soient

m la masse du disque ;
R son rayon ;
x la longueur des tangentes OA, OB ;
ω la vitesse angulaire du disque autour de son centre C, comptée positivement lorsque la vitesse qu'elle imprimerait au point A du disque est dirigée dans le sens de AO ;
M la masse de la barre OD ;
l la distance de son centre de gravité au point O ;
μ son moment d'inertie par rapport à ce point ;
2θ l'angle DOX.

Aux points A, B, le disque est soumis à deux réactions normales a, b et à deux réactions tangentielles α, β, dirigées suivant AO, BO, puisque, sans l'intervention du frottement, les points A, B du disque glisseraient dans les directions OA, OB, l'angle AOX diminuant.

Comme le centre de gravité C du disque reste à une hauteur constante, on a

$$(1)\qquad a - mg - b\cos 2\theta - \beta \sin 2\theta = 0;$$

la variation de l'abscisse x de ce centre est déterminée par l'équation

$$(2)\qquad m\frac{d^2 x}{dt^2} = b \sin 2\theta - \beta \cos 2\theta - \alpha;$$

enfin l'on a, pour le mouvement du disque autour d'une perpendiculaire à son plan menée par le centre de gravité,

$$\frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt} = R(\alpha - \beta),$$

$$(3)\qquad mR\frac{d\omega}{dt} = 2(\alpha - \beta).$$

Pour trouver le mouvement de la barre OD, nous prendrons les moments par rapport à une perpendiculaire au plan DOX menée par le point O :

$$(4)\qquad 2\mu\frac{d^2\theta}{dt^2} = bx - Mgl\cos 2\theta.$$

Mais on a évidemment

$$x = R\cot\theta,\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{\sin^2\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2R\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Si l'on n'envisage le mouvement que pendant un temps très court, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ est absolument négligeable vis-à-vis de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et l'on peut prendre $-\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d^2x}{dt^2}$ pour $\frac{d^2\theta}{dt^2}$;

substituant dans l'équation (4), on en tire

$$(5)\qquad 2\mu\sin^2\theta\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{R}(\mathrm{M}gl\cos2\theta-bx).$$

Cherchons quelles doivent être les réactions pour qu'il y ait équilibre : en annulant les premiers membres des équations (2) et (3), on en tire

$$\alpha=\beta=b\,\mathrm{tang}\,\theta,$$

l'équation (1) donne alors

$$a=mg+b,$$

et l'équation (5) fait connaître b et, par suite, les autres réactions correspondant à l'équilibre; mais, pour qu'elles puissent être réalisées, il faut que α soit au plus égal à fa, β à fb; d'après les relations que je viens d'écrire, il faut et il suffit pour cela que $\mathrm{tang}\,\theta$ soit $\leqq f$; il y aura équilibre dès que f sera au moins égal à $\mathrm{tang}\,\theta$ ou à $\frac{\mathrm{R}}{x}$.

Si l'on attribue à f des valeurs décroissantes à partir de $\mathrm{tang}\,\theta$, c'est au point B, où la réaction normale est la plus faible, que se produira d'abord un glissement. Cherchons dans quelles conditions le disque, d'abord maintenu en repos, se mettra en mouvement en roulant sans glisser sur OX quand on le laissera libre. La réaction tangentielle β sera égale à fb, et, comme l'accélération initiale du point A est perpendiculaire à OX, nous aurons, au début du mouvement,

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\mathrm{R}\frac{d\omega}{dt}=0.$$

Eu égard à ces relations, on tire des équations (2) et (3)

$$(6)\qquad 3\alpha=b(\sin2\theta+2f-f\cos2\theta),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{4b}{3m}\cos^2\theta(\mathrm{tang}\,\theta-f).$$

Cette valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$ devant évidemment être positive, on voit que f doit être $< \operatorname{tang}\theta$; si on la substitue dans (5), on en déduit

$$(7)\quad [2\mu\sin^2 2\theta(\operatorname{tang}\theta - f) + 3m\mathrm{R}x]b = 3\mathrm{M}mgl\mathrm{R}\cos 2\theta.$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement au point A, il faut que la valeur (6) de 3α soit au plus égale au produit de $3f$ par la valeur de a tirée de l'équation (1), ou que l'on ait

$$b(\sin 2\theta + 2f - f\cos 2\theta) \leqq 3f[mg + b(\cos 2\theta + f\sin 2\theta)];$$

remplaçons b par sa valeur tirée de l'équation (7) et chassons le dénominateur toujours positif si $f < \operatorname{tang}\theta$; il vient, après de simples réductions,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(3 - \frac{2\mu}{\mathrm{MR}l}\operatorname{tang}2\theta\right)f^2 \\ &\quad + \left(\cot\theta - 3\operatorname{tang}\theta + \frac{4\mu}{\mathrm{MR}l}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{6mx}{\mathrm{M}l\sin 4\theta}\right)f - 1 \geqq 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $f = \operatorname{tang}\theta$, le trinome prend la valeur $\frac{6m\mathrm{R}}{\mathrm{M}l\sin 4\theta}$, toujours positive; si le coefficient de f^2 est positif, le trinome admet une racine positive f' et une racine négative; f doit être supérieur à f', tout en restant inférieur à $\operatorname{tang}\theta$ qui est, comme on le vérifie, lui-même supérieur à f'; si le coefficient de f^2 est négatif, le trinome a deux racines positives entre lesquelles est compris $\operatorname{tang}\theta$; f doit lui-même être compris entre $\operatorname{tang}\theta$ et la plus petite, f', des racines. Ainsi, dans tous les cas, on connaît le minimum au-dessous duquel f ne doit pas descendre pour qu'il y ait roulement.

Lorsque f est inférieur à f', le disque glisse sur les deux barres et l'on a $\alpha = fa$; les équations (1), (2), (3), (5) font connaître a, b, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d\omega}{dt}$; la vitesse du point A du disque est d'abord dirigée dans le sens où x croît et $\frac{d^2x}{dt^2} - R\frac{d\omega}{dt}$ est d'abord positif; si l'on exprime cette condition, on trouve que f doit satisfaire à l'inégalité (8) changée de sens. Il n'existe pas de valeurs de f pour lesquelles le disque roulerait sur OD en glissant sur OX, ce qui, *a priori,* semblait bien évident.