NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur quelques théorèmes de la géométrie des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 218-230

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__218_1>

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DES CONIQUES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

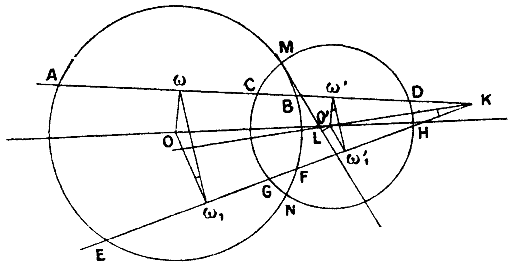
Cette Note a pour but de montrer comment, par une série de transformations, on peut déduire un grand nombre de propositions, déjà connues ou nouvelles, du théorème de Géométrie suivant :

1. *L'enveloppe d'une droite coupant harmonique-*

ment deux cercles donnés est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles.

Voici d'abord comment on peut démontrer simplement cette proposition, qui a d'ailleurs déjà été souvent remarquée. Soient O et O' les deux cercles donnés, (ABCD), (EFGH) deux positions de la droite mobile,

Fig. 1.



K leur point de rencontre. Menons des centres O et O' les perpendiculaires $O\omega$, $O\omega_1$, $O'\omega'$, $O'\omega'_1$ sur les deux droites et joignons $\omega\omega_1$, $\omega'\omega'_1$. Les cercles ω et ω_1 de diamètres AB et EF coupent orthogonalement le cercle O' : donc le point O' est situé sur leur axe radical. Le point K étant visiblement aussi un point de cet axe radical, la droite KO' est perpendiculaire sur la ligne des centres $\omega\omega_1$. Les deux angles $O\omega_1\omega$, $O'K\omega_1$ sont alors égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, mais on a

$$\widehat{O'K\omega_1} = \widehat{O'\omega'\omega'_1}$$

dans le quadrilatère inscriptible $O'\omega'K\omega'_1$. Les deux triangles $O\omega\omega_1$, $O'\omega'\omega'_1$ qui ont déjà un angle égal $\left(\widehat{\omega O \omega_1} = \widehat{\omega' O' \omega'_1}\right)$ sont semblables, et l'on a la relation

$$\frac{O\omega}{O'\omega'_1} = \frac{O\omega_1}{O'\omega'} \quad \text{ou} \quad O\omega \times O'\omega' = O\omega_1 \times O'\omega'_1;$$

ce qui prouve que la droite mobile enveloppe une conique ayant pour foyers O et O'.

Les tangentes aux cercles O et O' en leurs points d'intersection M et N sont évidemment des positions de la droite mobile : donc la conique enveloppe est tangente à ces quatre droites. On voit aussi que, R et R' désignant les rayons des deux cercles, le carré du demi-petit axe de l'enveloppe a pour valeur $R \times O'L$ ou $RR' \cos O'ML$. Quand les deux cercles se coupent orthogonalement, l'enveloppe se réduit aux deux points O et O'.

2. Transformons la proposition précédente en lui appliquant le principe de dualité. Remarquons que la conique enveloppe ayant pour foyers O et O' est tangente aux droites isotropes issues de O et O', c'est-à-dire est tangente aux tangentes aux deux cercles menées par les points cycliques I et J. La proposition corrélative sera alors la suivante :

Le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à deux cercles O et O' forment un faisceau harmonique est une conique passant par les huit points de contact des quatre tangentes communes.

3. Généralisons les deux propriétés précédentes en leur faisant subir une transformation homographique quelconque amenant les points cycliques à distance finie. On aura les deux théorèmes suivants, relatifs à deux coniques quelconques du plan :

1° *L'enveloppe d'une droite coupant harmoniquement deux coniques est une autre conique tangente aux huit tangentes à ces deux coniques en leurs points d'intersection ;*

2° *Le lieu des points tels que les tangentes menées* *de chacun d'eux à deux coniques forment un faisceau harmonique est une conique passant par les huit points de contact des tangentes communes.*

4. Un cas particulier intéressant, que nous allons considérer, est celui où l'une des coniques est formée de deux points. Dans cette supposition, le second théorème s'énoncera de la façon suivante :

Le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique soient conjuguées des droites les joignant à deux points fixes est une conique passant par ces deux points et les points de contact des tangentes menées de chacun d'eux à la conique donnée.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Le lieu des points tels que les droites les joignant à deux points fixes soient conjuguées par rapport à une conique est une conique passant par les deux points et les points de contact des tangentes menées de chacun d'eux à la conique donnée.

Si P est le point de rencontre des polaires des deux points A et B par rapport à la conique donnée S, P est le point d'intersection de deux sécantes communes à S et à la conique lieu Σ : donc P est un pôle double de ces deux coniques et, comme la polaire de P par rapport à S est la droite AB, cette droite est aussi la polaire de P par rapport à Σ.

Corollaire. — Deux points quelconques A et B, et les points de rencontre avec une conique de leurs polaires par rapport à cette conique, sont situés sur une même conique. La droite AB a même pôle par rapport aux deux coniques.

5. Remarquons que toutes les tangentes menées des différents points du lieu précédent à la conique S déterminent une involution sur la droite joignant les deux points fixes, involution dont les points doubles sont ces deux points fixes. Le théorème pourra donc aussi s'exprimer ainsi :

Étant données une conique et une involution sur une droite de son plan, le lieu des points de rencontre des tangentes menées de chaque couple de points homologues est une conique passant par les points doubles de l'involution et par les points de contact des tangentes menées à la conique par ces points doubles.

Corollaire. — Étant donnés une conique et quatre points A, B, C, D sur une droite, si de chacun d'eux on mène les tangentes à la conique, les huit points de rencontre des tangentes des couples (AB) (CD) sont sur une conique passant par les deux points doubles de l'involution définie par (AB) et (CD) et par les points de contact des tangentes menées des deux points doubles à la coniqne.

6. Supposons que la droite Δ soit tangente à la conique. Alors une des tangentes menées de chacun des points doubles de l'involution à la conique ayant son point de contact sur la droite, la conique lieu se décompose en deux droites : la droite donnée est celle qui passe par les points de contact des deux autres tangentes menées des points doubles à la conique. De là le théorème suivant :

Le lieu des points de rencontre des tangentes menées à une conique par chaque couple de points homologues d'une involution déterminée sur une tangente à la conique est une droite.

Le théorème corrélatif par dualité s'énoncera ainsi :

7. *Les cordes interceptées dans une conique par un faisceau involutif ayant son sommet sur la conique passent par un point fixe qui est le pôle de la corde interceptée dans la conique par les rayons doubles.*

C'est le théorème de Frégier généralisé.

Dans le cas particulier où les rayons doubles sont les droites isotropes, tous les couples de rayons homologues de l'involution sont rectangulaires ; on obtient le théorème de Frégier.

8. Considérons de nouveau une conique S et une droite D dans son plan.

Soient A et B deux points quelconques de la droite, C et D deux points conjugués par rapport à A et B. La conique Σ du lieu (5), relative à l'involution dont C et D sont les points doubles, passe par C et D et par les points de rencontre des tangentes à S menées par A et B. Soient E et F deux autres points conjugués par rapport à A et B. La conique Σ, relative à l'involution dont E et F sont les points doubles, passe par E et F et par les points de rencontre des tangentes menées à S par A et B, . . . ; toutes les coniques Σ forment donc un faisceau et l'on voit qu'elles déterminent une involution sur la droite D, involution dont les points doubles sont A et B. Toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère déterminent donc sur la troisième diagonale du quadrilatère complet une involution dont les points doubles sont les deux sommets du quadrilatère complet situés sur cette diagonale. Cette propriété peut d'ailleurs être considérée comme une conséquence du théorème de Desargues. En particulier, deux des diagonales du quadrilatère qui constituent une des coniques du faisceau divisent harmoniquement la troisième diagonale.

Cas où la droite D *est la droite de l'infini.* — Considérons sur la droite de l'infini l'involution dont les points cycliques sont les points doubles. Alors tous les couples de points homologues sont les points à l'infini dans deux directions rectangulaires. La conique Σ, relative à une conique quelconque S, passant par les points cycliques, est un cercle; ce cercle est le lieu des points de rencontre des tangentes à la conique perpendiculaires entre elles; donc :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique est un cercle.

Ce cercle orthoptique est concentrique à la conique, puisque nous avons fait remarquer que la droite D, ici la droite de l'infini, avait même pôle par rapport aux deux coniques S et Σ.

La parabole est tangente à la droite de l'infini, donc (6) :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est une droite.

Le cercle orthoptique d'une conique passera aussi par les points de rencontre de la conique avec les polaires des points cycliques. Les couples de sécantes communes à la conique et au cercle orthoptique sont donc les deux couples de directrices et les polaires des points cycliques. On peut, en particulier, définir les directrices d'une conique comme étant les couples de sécantes communes à la conique et aux polaires des points cycliques ([1]).

([1]) Cette définition, où n'interviennent pas les foyers, peut être

9. Il est évident que les points doubles de toutes les involutions, admettant pour couple de points conjugués deux points donnés, forment une involution dont les deux points donnés sont les points doubles. Considérons, en particulier, toutes les involutions de la droite de l'infini dont les points cycliques constituent un couple de points conjugués. Les coniques Σ relatives à une conique S et à toutes ces involutions seront des hyperboles équilatères concentriques à la conique S. Toutes ces hyperboles équilatères auront quatre points communs : ce seront les points de rencontre des tangentes à la conique S issues des points cycliques, c'est-à-dire les foyers de la conique S (8). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les foyers d'une conique sont quatre points (deux réels et deux imaginaires) communs à une infinité d'hyperboles équilatères concentriques à la conique; chacune de ces hyperboles passe par les extrémités des diamètres de la conique conjugués à ses asymptotes.

Les axes de la conique, formant un système de diamètres conjugués rectangulaires, constituent l'une de ces hyperboles équilatères; donc :

Les foyers d'une conique sont les points de rencontre de ses axes et d'une hyperbole équilatère concentrique à la conique, en particulier de l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées. On retrouve ainsi par la Géométrie ce résultat curieux auquel, comme on sait, on est conduit dans

---

prise pour point de départ d'une méthode de recherche analytique de l'équation du système des directrices d'une conique.

l'une des méthodes analytiques de recherche des foyers ([1]).

En nous appuyant sur les théorèmes précédemment vus, nous nous proposons dans ce qui va suivre de démontrer une proposition générale dont le théorème connu de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique n'est qu'un cas particulier. Auparavant nous établirons encore la propriété suivante :

Une conique Σ *étant harmoniquement circonscrite à une conique* S, *les tangentes menées d'un point quelconque* M *de* Σ *à* S *sont conjuguées des droites joignant le point* M *aux points de rencontre de* S *avec la polaire du point* M.

On sait qu'une conique Σ est dite harmoniquement

([1]) On voit que l'on peut remplacer l'hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées par l'une quelconque des hyperboles du faisceau. Ainsi l'équation de l'ellipse étant prise sous la forme

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{1}$$

l'hyperbole du faisceau, ayant pour asymptotes les bissectrices des angles des axes de l'ellipse, aura pour axe transverse l'axe focal de l'ellipse, ses sommets seront les foyers. Nous savons que cette hyperbole passe par les extrémités des diamètres de l'ellipse conjugués aux droites de coefficients angulaires $+1$ et -1, en particulier, du diamètre $y = -\frac{b^2}{a^2}x$. Remplaçant y par cette valeur dans (1), il vient

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}.$$

En formant $x^2 - y^2$, on aura la valeur du carré du demi-axe transverse de l'hyperbole équilatère, c'est-à-dire la distance du foyer de l'ellipse au centre de la courbe; or

$$x^2 - y^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2} - \frac{b^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = a^2 - b^2.$$

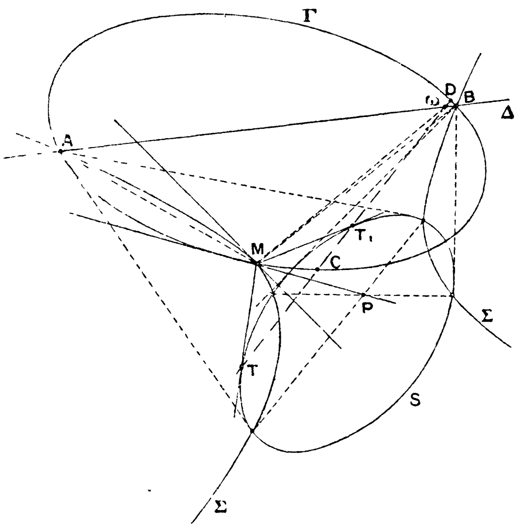
circonscrite à une conique S quand elle est circonscrite à un triangle ABC conjugué par rapport à S. Soit alors Γ la conique enveloppe des droites coupant harmoniquement S et Σ. La conique Σ étant circonscrite au triangle ABC conjugué par rapport à S, les trois droites AB, AC, BC, sont divisées harmoniquement par S et Σ ce sont donc trois tangentes à la conique Γ. Il en est de même, comme nous le savons, des tangentes MT, NT à la conique S en deux points M et N de rencontre de S et Σ. Or les pôles des cinq tangentes AB, AC, BC, MT, NT à la conique Γ par rapport à la conique S sont situés sur Σ, donc Σ est la polaire réciproque de Γ par rapport à S. Il en résulte que la polaire d'un point quelconque de Σ par rapport à S étant tangente à Γ coupe harmoniquement S et Σ.

Remarque. — En transformant homographiquement de façon que deux des sommets B et C du triangle ABC deviennent les points cycliques, la conique conjuguée S devient une hyperbole équilatère ayant pour centre le point a transformé de A, la conique circonscrite Σ devient un cercle, passant par le centre a de l'hyperbole; on a l'énoncé suivant :

La polaire d'un point quelconque d'un cercle passant par le centre d'une hyperbole équilatère, par rapport à cette hyperbole, est divisée harmoniquement par les deux courbes.

Soient maintenant une conique S et une droite Δ dans son plan, joignant deux points quelconques A et B; soit Σ la conique passant par A, B et les points de contact des tangentes menées de A et B à S. Σ est le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à S soient conjuguées des droites les joignant aux points A et B (4). Considérons une troisième conique Γ passant par les points A et B, et circonscrite à un triangle quelconque conjugué par rapport à S. On sait que les tangentes MT, MT_1 de tout point M de Γ à S sont conjuguées par rapport aux droites joignant M aux points de rencontre C et D avec Γ de la polaire de M par rapport à S. Soit alors M un des points de rencontre de Γ avec Σ. La conjuguée de la tangente en M à Σ par rapport aux droites MA et MB est évidemment la droite joignant le point M au pôle P de la corde AB par rapport à Σ, qui est aussi le pôle de AB par rapport à S. Or je dis que cette droite MP est la tangente en M à la conique Γ.

Fig. 2.



En effet, les deux couples de droites (MA, MB), (MC, MD) sont conjuguées par rapport aux tangentes MT, MT_1. Donc, d'après le théorème de Frégier, le point de rencontre ω de AB et CD appartient à la conjuguée de la tangente en M à Γ par rapport aux rayons doubles MT, MT_1 de l'involution; en d'autres termes, la conjuguée de $M\omega$ par rapport aux droites MT, MT_1, est la tangente en M à Γ. Or cette conjuguée est la droite MP, car la droite MP étant la polaire de ω par rapport à S puisqu'elle joint les pôles P et M des deux droites AB et TT_1 passant par ω, les droites MP et $M\omega$ sont conjuguées par rapport à la conique S et, par suite, forment un faisceau harmonique avec les tangentes MT et MT_1.

Il résulte de la démonstration précédente le théorème suivant :

Étant donnée une conique S *et deux points* A *et* B, *si l'on considère la conique* Σ *passant par* A, B *et les points de contact des tangentes à* S *issues de* A *et* B, *toute conique* Γ *passant par* A, B *et circonscrite à un triangle quelconque conjugué à la conique* S, *coupe* Σ *en deux points tels que les tangentes à* Γ *et* Σ *en chacun de ces points soient conjuguées par rapport aux droites les joignant aux points* A *et* B.

Pour déduire de là le théorème de M. Faure, il suffit de considérer le cas particulier où les points A et B sont les points cycliques. Alors la conique Σ est le cercle orthoptique de S, les coniques Γ sont les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à S; on obtient le théorème énoncé par M. Faure :

Les cercles C, *circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique, coupent orthogonalement un cercle fixe, qui est le cercle orthoptique de la conique.*

En effet, les tangentes aux cercles C et au cercle orthoptique en leurs points d'intersection avec ce cercle, étant conjuguées par rapport aux droites isotropes, sont rectangulaires.

En particulier :

1° Le cercle orthoptique d'une hyperbole équilatère est réduit au centre de la courbe, donc :

Tout cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

2° Le cercle orthoptique d'une parabole est dégénéré en une droite, la directrice, donc :

Le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une parabole est la directrice.

Les directrices de toutes les paraboles conjuguées par rapport à un triangle passent par le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'orthocentre du triangle formé en joignant les milieux des côtés, et toutes les paraboles conjuguées par rapport au premier triangle sont inscrites dans le second ; donc :

Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par l'orthocentre du triangle.