Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 202-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__202_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les coordonnées tangentielles, par *G. Papelier*, ancien élève de l'École Normale, professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Orléans, avec une Préface de *P. Appell*, Membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne. 1^e Partie : Géométrie plane. In-8° de VI-325 pages. Paris, Nony et C^{ie}; 1894. Prix : 5^{fr}.

La Géométrie analytique, créée par Descartes dans un Ouvrage paru en 1637, repose sur l'emploi de méthodes qui permettent de donner une forme algébrique aux problèmes de Géométrie. Ces méthodes consistent à faire correspondre à chaque point du plan un système de deux nombres, appelés *coordonnées* du point; une équation entre ces coordonnées représente une courbe; les points communs à deux courbes s'obtiennent en résolvant leurs équations.

Tout problème de Géométrie se trouve ainsi ramené à une question de calcul; inversement, tout fait analytique peut être interprété géométriquement. Ainsi le problème des tangentes conduit à la notion de la dérivée, ou fournit une représentation géométrique de cette notion; l'idée d'invariant algébrique ou différentiel conduit à la découverte de propriétés géométriques, laissées invariables par certaines transformations.

Mais le système de coordonnées cartésiennes dans le plan ou dans l'espace est loin d'être le seul qui permette de représenter géométriquement les faits algébriques et analytiques. On peut en effet développer l'idée de Descartes sous un autre point de vue, en définissant, par un système de nombres, non plus un *point* du plan ou de l'espace, mais un être géométrique quelconque, ligne droite ou courbe, surface plane ou courbe. Ces nombres qui sont, par exemple, les coefficients figurant dans les équations cartésiennes de l'élément géométrique considéré, s'appellent encore, par extension, les coordonnées de l'élément. Ainsi une droite dans un plan est définie par deux nombres qui sont ordinairement les inverses des segments qu'elle détache sur les axes; un plan dans l'espace est défini par trois nombres analogues; un cercle dans le plan est défini par trois coordonnées qui sont les coordonnées cartésiennes du centre et la puissance de l'origine par rapport au cercle; une droite dans l'espace est définie par quatre nombres, etc.

Une équation entre trois variables a, b, c représente alors, soit une surface lieu de points, si a, b, c sont regardées comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, soit une surface enveloppe de plans, si a, b, c sont regardées comme les coordonnées d'un plan, soit un système de cercles dans un plan fixe, si les variables sont regardées comme les coordonnées d'un cercle, etc.; de même, une équation entre quatre variables peut être interprétée comme représentant une surface dans l'espace à quatre dimensions, ou un système de droites dans l'espace à trois dimensions, etc.

En résumé, on peut interpréter géométriquement, d'une infinité de manières, les faits algébriques et analytiques relatifs à des équations contenant un nombre quelconque de variables.

Les interprétations les plus intéressantes sont évidemment les plus simples.

Pour la Géométrie plane, il existe deux systèmes également simples : celui qui consiste à prendre comme élément géométrique le *point* défini par *deux coordonnées*, et celui qui consiste à prendre comme élément la *droite* définie également par *deux coordonnées*.

Le développement du premier point de vue fait l'objet de la *Géométrie ponctuelle;* celui du second fait l'objet de la *Géométrie tangentielle.* Les propriétés algébriques des systèmes d'équations à deux variables donnent alors, suivant la façon dont on les interprète, des propriétés des ensembles de points ou des propriétés des ensembles de droites. Les deux séries de théorèmes que l'on obtient de cette manière ne sont donc que la traduction géométrique des mêmes faits algébriques; et l'on passe d'un théorème de l'une des séries au théorème correspondant ou corrélatif de l'autre, en y remplaçant les points par des droites et réciproquement.

Nous sommes ainsi amenés à un autre point de vue, d'après lequel le passage de la Géométrie ponctuelle à la Géométrie tangentielle peut être regardé comme un mode particulier de transformation des figures, faisant correspondre des droites aux points et inversement.

Le fait que tout théorème peut être transformé ainsi a reçu de Chasles le nom de *principe de dualité.*

Voici, sur l'origine et le développement de ces idées, quelques renseignements historiques empruntés en majeure partie à l'*Aperçu historique* de Chasles.

De Beaune semble avoir eu le premier l'idée de définir certaines courbes à l'aide des propriétés de leurs tangentes; par une question de cette nature posée à Descartes, il donna naissance à la *méthode inverse des tangentes*, dont Descartes jeta les fondements en regardant un point d'une courbe comme l'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

La théorie des développées, due à Huygens, fournit ensuite des exemples particulièrement importants de courbes regardées comme enveloppées par des droites.

Mais on peut dire qu'Euler, en considérant une courbe quelconque comme enveloppe d'une droite de la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \varphi(\alpha),$$

donna le premier exemple d'une courbe définie dans un système de coordonnées tangentielles; ce système, dans lequel les éléments de longueur et les rayons de courbure de la courbe et de ses développées successives ont des expressions particulièrement simples, se trouve indiqué à la page 58 de ce volume.

Les coordonnées de la droite sous la forme actuellement employée ont été introduites à peu près à la même époque par Chasles (*Aperçu historique*, 1837, et *Mémoire de Géométrie*, 1829) et par Plücker (*Journal de Crelle*, t. 5, 1829).

Quant aux méthodes de transformation qui ont conduit au principe de dualité, elles ont d'abord été employées sur la sphère. D'après un théorème dû à Snellius, vers 1630, toute figure sphérique possède une figure supplémentaire, de telle nature qu'à chaque point de la première corresponde un arc de grand cercle de la deuxième et inversement.

En 1685, La Hire, dans son *Traité des coniques*, indique les propriétés réciproques des points et droites qu'on nomme actuellement *pôles* et *polaires* par rapport à une conique. Ces propriétés ont été étendues par Monge aux surfaces du second ordre, et c'est de l'époque de Monge seulement que datent l'importance et les usages de cette théorie des pôles et polaires.

Une des premières et des plus célèbres applications fut celle qui permit à Brianchon de déduire, du théorème de Pascal sur six points d'une conique, une propriété correspondante de six tangentes (1806).

Le principe de dualité dans sa généralité a d'abord été énoncé par Poncelet (*Annales de Mathématiques*, t. VIII, 1817-1818), qui l'a déduit de la théorie des pôles et polaires; ce principe a été ensuite établi, indépendamment des coniques, par Gergonne, par Möbius (*Barycentrischer Calcul*, 1827) et par Chasles.

L'Ouvrage de M. Papelier a pour objet le développement de la Géométrie tangentielle depuis les premiers éléments jusqu'à la théorie des coniques et des courbes algébriques. L'auteur s'est efforcé de suivre pas à pas les méthodes employées dans la Géométrie ponctuelle, de sorte que le lecteur, déjà familiarisé avec cette dernière, n'aura aucun effort nouveau à faire : il n'aura qu'à transposer les méthodes et les théorèmes qu'il connaît, en remplaçant les points par des droites et réciproquement.

Quant aux commençants, ils suivront avec autant de facilité cette manière de présenter les faits que la manière ordinaire.

Cet Ouvrage, écrit avec clarté et rigueur, renferme des développements sur certaines questions qu'on ne traite pas habituellement en coordonnées tangentielles : telles sont la discussion de la forme d'une courbe dans le voisinage d'une tangente ou d'une asymptote à l'aide du polygone de Newton, la classification des coniques, l'étude géométrique du contact de deux coniques, les invariants simultanés de deux coniques. De nombreux exercices sont traités dans le texte ou proposés au lecteur avec des indications sur leur solution.

Le Livre de M. Papelier est appelé à rendre de grands services, en familiarisant l'esprit des élèves avec une autre face de la Géométrie analytique, et en les mettant à même de tirer de chaque résultat de calcul deux théorèmes corrélatifs.

P. APPELL.