

A. ASTOR

**Sur quelques propriétés des cubiques  
unicursales**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 13  
(1894), p. 184-198

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1894\\_3\\_13\\_\\_184\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__184_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES UNICURSALES;**

PAR M. A. ASTOR.

---

On trouve, dans la Géométrie de Clebsch, qu'une cubique unicursale a trois points d'inflexion réels ou un seul, suivant que le point double est isolé ou non. Je me propose d'établir cette propriété par des calculs élémentaires. J'indiquerai, de plus, quelques résultats que je crois nouveaux, et dont voici les principaux.

On sait que, par un point de la courbe, on peut, en dehors de la tangente en ce point, lui mener deux autres

tangentes; nous appellerons, pour abrégé, la droite qui joint les points de contact de ces tangentes à la corde polaire du point donné. Nous dirons aussi que deux points de la courbe sont conjugués lorsque les rayons qui les joignent au point double forment avec les deux tangentes en ce point un faisceau harmonique. Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° *La corde polaire enveloppe une conique inscrite à l'angle des tangentes au point double aux points où les côtés de cet angle sont rencontrés par la droite qui joint les trois points d'inflexion ;*

2° *La corde polaire d'un point passe par le point conjugué et forme, avec le rayon de ce point, d'une part, et les deux tangentes qui en sont issues, un faisceau harmonique.*

3° *Le lieu du milieu de la corde polaire est une cubique unicursale ayant même point double que la proposée. Si deux directions asymptotiques de la cubique forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, ce lieu devient la parallèle à la troisième asymptote menée par le point double. Et c'est le seul cas où le degré du lieu puisse s'abaisser.*

Supposons d'abord les deux tangentes au point double réelles et distinctes; prenons-les pour axes de coordonnées; l'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(1) \quad mx^3 + nx^2y + pxy^2 + qy^3 - lxy = 0;$$

posant  $y = tx$ , on en déduit

$$(2) \quad x = \frac{lt}{qt^3 + pt^2 + nt + m}, \quad y = \frac{lt^2}{qt^3 + pt^2 + nt + m}.$$

Nous appellerons, pour abrégé, le point de la courbe dont les coordonnées sont données par les formules (2)

le point  $t$ , de sorte que les points  $t$  et  $-t$  seront deux points conjugués.

L'équation de la corde qui joint les deux points  $t$  et  $t'$  s'écrit immédiatement, comme il suit, sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ lt & lt^2 & qt^3 + pt^2 + nt + m \\ lt' & lt'^2 & qt'^3 + pt'^2 + nt' + m \end{vmatrix} = 0.$$

Développant et divisant par  $l(t' - t)$ , il vient

$$(3) \quad \begin{cases} [qt^2t' - ntt' - m(t + t')]x \\ - [qtt'(t + t') + ptt' - m]y + ltt' = 0. \end{cases}$$

Si nous faisons, dans (3),  $t' = t$ , nous aurons l'équation de la tangente en  $t$ , savoir :

$$(4) \quad (qt^3 - nt^2 - 2mt)x - (2qt^3 + pt^2 - m)y + lt^2 = 0.$$

Elle est du quatrième degré en  $t$ ; il y a donc quatre tangentes passant par un point donné du plan. Si nous supposons que ce point soit un point  $\theta$  de la courbe, l'équation en  $t$  devra avoir deux racines égales à  $\theta$ , et l'équation restante, quand on aura divisé par  $(t - \theta)^2$ , donnera les valeurs de  $t$  correspondant aux deux autres points de contact. L'équation en  $t$  est

$$\theta(qt^4 - nt^2 - 2mt) - \theta^2(2qt^3 + pt^2 - m) + (q\theta^3 + p\theta^2 + n\theta + m)t^2 = 0,$$

et, si l'on divise par  $(t - \theta)^2$ , il reste l'équation

$$(5) \quad q\theta t^2 + m = 0.$$

Les deux racines de cette équation étant égales et de signes contraires, les deux points de contact sont deux points conjugués, ce qui est un résultat connu.

L'équation (5) peut être considérée comme donnant la valeur de  $\theta$  correspondant au point où la tangente

en  $t$  coupe de nouveau la courbe. Ce point  $t$  sera un point d'inflexion si cette équation donne  $\theta = t$ . Les trois points d'inflexion sont donc donnés par l'équation

$$(6) \quad qt^3 + m = 0,$$

qui montre bien qu'il y en a un seul réel et deux imaginaires conjugués.

L'équation de la corde polaire de  $\theta$  s'obtient en remplaçant, dans (3),  $t + t'$  par 0 et  $tt'$  par  $\frac{m}{q\theta}$ . Cette équation est

$$(7) \quad (m - n\theta)x + \theta(q\theta - p)y + l\theta = 0.$$

En l'ordonnant par rapport à  $\theta$ , elle devient

$$qy\theta^2 - (nx + py - l)\theta + mx = 0,$$

et l'enveloppe de cette droite est la conique

$$(8) \quad (nx + py - l)^2 - 4mqxy = 0.$$

La droite  $nx + py - l = 0$  est la droite sur laquelle sont situés les trois points d'inflexion, car l'équation qui donne les valeurs de  $t$  correspondant à ses points de rencontre avec la courbe est

$$nt + pt^2 - (qt^3 + pt^2 + nt + m) = 0$$

ou

$$qt^3 + m = 0.$$

Nous vérifions donc le premier résultat que nous avons énoncé.

Formons maintenant l'équation qui représente les deux tangentes issues de  $\theta$ . Ces deux droites auront pour équations

$$(qt'^4 + nt'^2 - 2mt')x - (2qt'^3 + pt'^2 - m)y + lt'^2 = 0,$$

$$(qt''^4 - nt''^2 - 2mt'')x - (2qt''^3 + pt''^2 - m)y + lt''^2 = 0,$$

$t'$  et  $t''$  étant les racines de l'équation

$$q\theta t^2 + m = 0.$$

Si nous remplaçons dans chacune d'elles  $t'^2$  ou  $t''^2$  par  $-\frac{m}{q\theta}$ , elles deviennent

$$(m + n\theta)x + \theta(p + q\theta)y - l\theta + 2q\theta(y - \theta x)t' = 0,$$

$$(m + n\theta)x + \theta(p + q\theta)y - l\theta + 2q\theta(y - \theta x)t'' = 0.$$

Multipliant membre à membre et remplaçant  $t' + t''$  par 0 et  $t't''$  par  $\frac{m}{q\theta}$ , on a, pour l'équation qui représente les deux tangentes,

$$(9) [(m + n\theta)x + \theta(p + q\theta)y - l\theta]^2 + 4mq\theta(y - \theta x)^2 = 0.$$

La forme de cette équation montre immédiatement le second théorème énoncé, car l'équation

$$(10) \quad (m + n\theta)x + \theta(p + q\theta)y - l\theta = 0,$$

s'obtenant en remplaçant  $\theta$  dans (7) par  $-\theta$ , représente la corde polaire du point  $-\theta$ , et l'on voit que cette corde passe au point  $\theta$  et forme avec le rayon  $y - \theta x$  de ce point et les deux tangentes (9) qui en sont issues un faisceau harmonique.

Proposons-nous maintenant d'avoir le lieu du milieu de la corde polaire, dont l'équation est

$$(7) \quad (m - n\theta)x + \theta(q\theta - p)y + l\theta = 0.$$

On pourrait obtenir le milieu en remarquant que c'est le point de rencontre de la corde (7) avec le diamètre conjugué de sa direction par rapport à la conique représentée par l'équation (9); mais il est plus simple de procéder de la façon suivante :

Appelons  $x', y', x'', y''$  les coordonnées des deux points

de contact,  $x_1, y_1$ , celles du point milieu; nous aurons

$$(11) \quad x_1 = \frac{x' + x''}{2}, \quad y_1 = \frac{y' + y''}{2}.$$

Or  $x', y', x'', y''$  s'obtiennent au moyen des formules

$$(12) \quad x = \frac{lt}{qt^3 - pt^2 + nt + m},$$

$$(13) \quad y = \frac{lt^2}{qt^3 + pt^2 + nt + m},$$

en y remplaçant successivement  $t$  par les racines  $t'$  et  $t''$  de l'équation

$$(5) \quad q\theta t^2 + m = 0.$$

On aura donc l'équation qui donne  $x'$  et  $x''$  en éliminant  $t$  entre (5) et (12); de même on aura celle qui donne  $y'$  et  $y''$  en éliminant  $t$  entre (5) et (13); ces éliminations se font aisément, et l'on trouve, pour  $x_1$  et  $y_1$ , les valeurs suivantes :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-lq\theta(m - n\theta)}{m\theta(q\theta - p)^2 + q(m - n\theta)^2}, \\ y_1 = \frac{-lm\theta(q\theta - p)}{m\theta(q\theta - p)^2 + q(m - n\theta)^2}. \end{array} \right.$$

Le lieu est donc une courbe unicursale de troisième ordre ayant même point double que la proposée, car  $x_1$  et  $y_1$  sont nuls en même temps quand  $\theta$  est nul et quand il est infini.

Cherchons si le degré du lieu peut s'abaisser. Cela ne peut arriver que si le dénominateur des deux fractions qui donnent  $x_1$  et  $y_1$  a un facteur commun avec chacun des numérateurs; or ce facteur ne peut être  $\theta$ , car le terme indépendant du dénominateur, étant  $qm^2$ , ne saurait s'annuler que si  $m = 0$  ou  $q = 0$ , auquel cas la courbe donnée se décomposerait. Dès lors, pour qu'il y ait un facteur commun, il faut que les deux binomes

$m - n\theta$  et  $q\theta - p$  égaux à zéro aient leur racine commune, c'est-à-dire que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Alors le lieu se réduira à une droite passant par l'origine

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad mx_1 + ny_1 = 0.$$

Il est facile d'avoir l'interprétation géométrique de ce résultat. Posons en effet

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{1}{\lambda},$$

l'équation de la courbe devient

$$(mx^2 + py^2)(x + \lambda y) - lxy = 0.$$

Deux directions asymptotiques forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, et l'on voit que, réciproquement, s'il en est ainsi, les coefficients  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  satisferont à la relation  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ . La troisième direction asymptotique est donnée par

$$x + \lambda y = 0 \quad \text{ou} \quad mx + ny = 0,$$

et l'on voit que le lieu du milieu se confond avec cette troisième direction asymptotique. Les propriétés énoncées sont donc démontrées dans le cas où les tangentes au point double sont réelles.

*Remarque.* — Les équations (7) et (10) des cordes polaires des points conjugués  $\theta$  et  $-\theta$  peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} mx + q\theta^2 y - (nx + py - l)\theta &= 0, \\ mx + q\theta^2 y + (nx + py - l)\theta &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre qu'elles se coupent toujours sur la droite

$nx + py - l = 0$  qui joint les points d'inflexion. D'autre part, la droite

$$mx + q\theta^2y = 0$$

ou

$$\frac{y}{x} = -\frac{m}{q\theta^2}$$

est le rayon correspondant au point de la courbe dont la corde qui joint les points  $\theta$  et  $-\theta$  est la corde polaire. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Si l'on prend un point de la cubique, les cordes polaires des deux points de contact des deux tangentes issues de ce point passent par le point de rencontre de la droite des inflexions et du rayon correspondant au point choisi et forment avec ces deux droites un faisceau harmonique.

Supposons maintenant le point double isolé. Plaçons-y toujours l'origine, et prenons pour axes deux droites quelconques faisant avec les tangentes un faisceau harmonique. Soient

$$\lambda x + \mu iy = 0, \quad \lambda x - \mu iy = 0$$

les équations de ces deux tangentes, et posons

$$X = \lambda x + \mu iy, \quad Y = \lambda x - \mu iy.$$

Je dis que l'équation d'une quelconque des courbes considérées peut s'écrire

$$(I) \quad mX^3 + nX^2Y + pXY^2 + qY^3 - lXY = 0,$$

c'est-à-dire sous la forme (1) du cas précédent,  $x$  et  $y$  étant remplacés par  $X$  et  $Y$ .

Soit, en effet,

$$Mx^3 + Nx^2y + Pxy^2 + Qy^3 - (\lambda^2x^2 + \mu^2y^2) = 0$$

l'équation d'une de ces courbes; elle sera identique à

l'équation (1) si l'on a

$$\begin{aligned} m + n + p + q &= \frac{Ml}{\lambda^3}, \\ 3m + n - p - 3q &= -\frac{Nli}{\lambda^2\mu}, \\ -3m + n + p - 3q &= \frac{Pl}{\lambda\mu^2}, \\ -m + n - p + q &= -\frac{Qli}{\mu^3}. \end{aligned}$$

Par des combinaisons simples de ces équations, on obtient les suivantes

$$\begin{aligned} n + q &= \frac{l}{2} \left( \frac{M}{\lambda^3} - \frac{Qi}{\mu^3} \right), & n - 3q &= \frac{l}{2} \left( \frac{P}{\lambda\mu^2} - \frac{Ni}{\lambda^2\mu} \right), \\ m + p &= \frac{l}{2} \left( \frac{M}{\lambda^3} + \frac{Qi}{\mu^3} \right), & 3m - p &= -\frac{l}{2} \left( \frac{P}{\lambda\mu^2} + \frac{Ni}{\lambda^2\mu} \right); \end{aligned}$$

et l'on voit que ces équations déterminent toujours  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  en fonction de  $l$  qui demeure indéterminée et pour laquelle on peut prendre une valeur réelle quelconque. De plus, il est facile de voir que  $m$  et  $q$ ,  $n$  et  $p$  sont imaginaires conjuguées. On trouve, en effet,

$$\begin{aligned} m &= \frac{l}{8} \left[ \frac{M}{\lambda^3} - \frac{P}{\lambda\mu^2} + \left( \frac{Q}{\mu^3} - \frac{N}{\lambda^2\mu} \right) i \right], \\ n &= \frac{l}{8} \left[ \frac{3M}{\lambda^3} + \frac{P}{\lambda\mu^2} - \left( \frac{3Q}{\mu^3} + \frac{N}{\lambda^2\mu} \right) i \right], \\ q &= \frac{l}{8} \left[ \frac{M}{\lambda^3} - \frac{P}{\lambda\mu^2} - \left( \frac{Q}{\mu^3} - \frac{N}{\lambda^2\mu} \right) i \right], \\ p &= \frac{l}{8} \left[ \frac{3M}{\lambda^3} + \frac{P}{\lambda\mu^2} + \left( \frac{3Q}{\mu^3} + \frac{N}{\lambda^2\mu} \right) i \right]. \end{aligned}$$

Tous les calculs faits dans le cas des tangentes réelles subsistent donc avec leur signification, sauf celui qui concerne le lieu des milieux des cordes polaires; car il est clair que les valeurs  $X_1$  et  $Y_1$  que l'on obtient par les formules (14) n'ont plus la même signification que

( 193 )

précédemment; mais nous verrons qu'on peut en déduire aisément les coordonnées du point milieu d'une corde polaire. Il est clair, de plus, que l'interprétation des résultats, quand elle a trait à la distinction de quantités réelles ou imaginaires, ne subsiste plus, et qu'il y a lieu de les interpréter à nouveau.

Par exemple, les points d'inflexion sont toujours donnés par l'équation

$$(6) \quad qt^3 + m = 0:$$

je dis que ces trois points sont réels.

L'équation

$$\frac{Y}{X} = t \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda x - \mu iy}{\lambda x - \mu iy} = t$$

équivalent à

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{t-1}{t+1} i.$$

Si nous posons  $\frac{t-1}{t+1} i = T$ , l'équation devient

$$\frac{y}{x} = \frac{\lambda}{\mu} T,$$

et, en prenant pour  $T$  une valeur réelle, l'intersection de cette droite avec la courbe donne un point réel. Dans tous les cas, nous appellerons indistinctement un *point de la courbe* le point  $t$  ou le point  $T$ , et il ne sera réel que tout autant que  $T$  lui-même le sera. Si  $T$  est donné,  $t$  est déterminé par l'équation

$$t = \frac{T + i}{i - T}.$$

Cela posé, l'équation qui donne les valeurs de  $t$  correspondant aux points d'inflexion étant

$$qt^3 + m = 0,$$

celle qui donne les valeurs correspondantes de  $T$  sera

$$q \left( \frac{T+i}{T-i} \right)^3 - m = 0.$$

Remarquant que  $m$  et  $q$  sont imaginaires conjugués, posons

$$\begin{aligned} m &= \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ q &= \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi); \end{aligned}$$

nous aurons

$$\left( \frac{T+i}{T-i} \right)^3 = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi;$$

par suite, les trois valeurs de  $\frac{T+i}{T-i}$  sont données par la formule

$$\cos 2 \frac{\varphi + k\pi}{3} + i \sin 2 \frac{\varphi + k\pi}{3},$$

où  $k$  a les valeurs 0, 1 et 2. Or, si nous écrivons

$$\frac{T+i}{T-i} = \cos 2 \frac{\varphi + k\pi}{3} + i \sin 2 \frac{\varphi + k\pi}{3},$$

nous en déduisons

$$T = \frac{\sin 2 \frac{\varphi + k\pi}{3} - \left( 1 + \cos 2 \frac{\varphi + k\pi}{3} \right) i}{1 - \cos 2 \frac{\varphi + k\pi}{3} - \sin 2 \frac{\varphi + k\pi}{3} i},$$

et, comme

$$\frac{\sin 2 \frac{\varphi + k\pi}{3}}{1 - \cos 2 \frac{\varphi + k\pi}{3}} = \frac{1 + \cos 2 \frac{\varphi + k\pi}{3}}{\sin 2 \frac{\varphi + k\pi}{3}} = \cot \frac{\varphi + k\pi}{3},$$

on voit que les trois valeurs de  $T$  sont réelles et égales à

$$\cot \frac{\varphi}{3}, \quad \cot \frac{\varphi + \pi}{3}, \quad \cot \frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

ce qui montre bien que les trois points d'inflexion sont réels. La droite qui les joint a pour équation

$$nX + pY - l = 0,$$

en remplaçant  $n$  et  $p$ ,  $X$  et  $Y$  par leurs valeurs, on trouve, pour l'équation de cette droite en coordonnées ordinaires,

$$\left(\frac{3M}{\lambda^2} + \frac{P}{\mu^2}\right)x + \left(\frac{3Q}{\mu^2} + \frac{N}{\lambda^2}\right)y - 4 = 0.$$

On transformerait de même l'équation (8) de la conique enveloppe des cordes polaires, où, bien entendu,  $x$  et  $y$  seraient remplacés par  $X$  et  $Y$ .

Je me bornerai à la remarque suivante :

L'équation (5) du cas précédent

$$q\theta t^2 + m = 0,$$

qui donne les valeurs de  $t$  correspondant aux points de contact des tangentes issues de  $\theta$ , montre que, si ces tangentes sont réelles pour le point  $\theta$ , elles sont imaginaires pour le point conjugué  $-\theta$ ; dans le cas actuel, où le point double est isolé, les tangentes issues d'un point réel quelconque de la courbe sont toujours réelles.

Les valeurs de  $t$  correspondant aux points de contact sont données par l'équation

$$t^2 = -\frac{m}{q\theta} = \frac{m}{q} \frac{\theta - i}{\theta + i}$$

en posant  $\theta = \frac{\Theta + i}{i - \Theta}$ , et alors  $\Theta$  est réel, comme nous l'avons dit.

Posons, comme précédemment,

$$m = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad q = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

et de plus

$$\theta - i = r(\cos\omega + i\sin\omega), \quad \theta + i = r(\cos\omega - i\sin\omega);$$

alors

$$t^2 = \cos 2(\varphi + \omega) + i \sin 2(\varphi + \omega),$$

et, par suite, les valeurs de  $t$  sont données par la formule

$$\cos(\varphi + \omega + k\pi) + i \sin(\varphi + \omega + k\pi),$$

où  $k$  a les valeurs 0 et 1.

Les valeurs correspondantes de  $T$  se trouvent au moyen de l'équation

$$\frac{T+i}{T-i} = -[\cos(\varphi + \omega + k\pi) + i \sin(\varphi + \omega + k\pi)],$$

et l'on en déduit, par un calcul analogue à celui des points d'inflexion,

$$T = -\operatorname{tang} \frac{\varphi + \omega + k\pi}{2};$$

d'où les deux valeurs

$$-\operatorname{tang} \frac{\varphi + \omega}{2}, \quad \operatorname{cot} \frac{\varphi + \omega}{2}.$$

Les deux valeurs de  $T$  sont donc réelles, et leur produit est égal à  $-1$ , ce qui nous ferait retrouver, si nous ne le savions déjà, que les deux points de contact sont conjugués, car les équations des deux rayons qui leur correspondent étant

$$y + \frac{\lambda}{\mu} \operatorname{tang} \frac{\varphi + \omega}{2} x = 0,$$

$$y - \frac{\lambda}{\mu} \operatorname{cot} \frac{\varphi + \omega}{2} x = 0,$$

l'équation qui représente ces deux rayons est

$$\mu^2 y^2 + \lambda \mu \left( \operatorname{tang} \frac{\varphi + \omega}{2} - \operatorname{cot} \frac{\varphi + \omega}{2} \right) xy - \lambda^2 x^2 = 0,$$

et l'on voit qu'ils forment un faisceau harmonique avec les deux droites dont l'équation est

$$\mu^2 y^2 + \lambda^2 x^2 = 0.$$

Pour ce qui concerne le lieu des milieux des cordes polaires, il n'est pas nécessaire de faire un nouveau calcul; car, si nous écrivons les équations

$$X_1 = \frac{-lq\theta(m-n\theta)}{m\theta(q\theta-p)^2 + q(m-n\theta)^2},$$

$$Y_1 = \frac{-lm\theta(q\theta-p)}{m\theta(q\theta-p)^2 + q(m-n\theta)^2},$$

$X_1$  et  $Y_1$  sont liées aux coordonnées  $x', y', x'', y''$  des points de contact des tangentes issues de  $\theta$  par les formules

$$X_1 = \frac{\lambda x' + \mu iy' - \lambda x'' - \mu iy''}{2},$$

$$Y_1 = \frac{\lambda x' - \mu iy' + \lambda x'' - \mu iy''}{2},$$

ou, en appelant toujours  $x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du point milieu,

$$X_1 = \lambda x_1 + \mu iy_1, \quad Y_1 = \lambda x_1 - \mu iy_1;$$

d'où l'on déduit

$$\lambda x_1 = \frac{X_1 - Y_1}{2}, \quad \mu y_1 = \frac{Y_1 - X_1}{2} i,$$

et, par suite, les coordonnées du point milieu sont données par les formules

$$x_1 = \frac{-l\theta[q(m-n\theta) + m(q\theta-p)]}{2\lambda[m\theta(q\theta-p)^2 + q(m-n\theta)^2]},$$

$$y_1 = \frac{-l\theta[m(q\theta-p) - q(m-n\theta)]}{2\mu[m\theta(q\theta-p)^2 + q(m-n\theta)^2]} i,$$

et l'on en aurait les expressions sous forme réelle en remplaçant  $m, n, p, q$  et  $\theta$  par leurs valeurs.

Mais il vaut mieux conserver les formules

$$\lambda x_1 + \mu iy_1 = \frac{-lq\theta(m-n\theta)}{m\theta(q\theta-p)^2 + q(m-n\theta)^2},$$

$$\lambda x_1 - \mu iy_1 = \frac{-lm\theta(q\theta-p)}{m\theta(q\theta-p)^2 + q(m-n\theta)^2},$$

et l'on en tire les mêmes conséquences que dans le cas où les tangentes au point double sont réelles; il faut et il suffit, pour que le degré s'abaisse, que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

et alors le lieu devient la droite

$$\frac{\lambda x_1 - \mu iy_1}{\lambda x_1 + \mu iy_1} = -\frac{m}{n}$$

ou

$$mX_1 + nY_1 = 0.$$

L'interprétation de ces résultats est exactement la même, et le troisième théorème que nous avons énoncé se trouve démontré dans tous les cas.

Nous pouvons remarquer que ce théorème s'applique à toutes les cubiques unicursales dont deux directions asymptotiques et les tangentes au point double ou réciproquement sont deux droites rectangulaires et les deux droites isotropes. C'est, par exemple, le cas de la strophoïde, droite ou oblique.