NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WORONTZOFF

Sur le développement en séries des fonctions implicites

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 167-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__167_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR M. WORONTZOFF.

1. Soient

$$f_0(y), \quad f_1(y), \quad f_2(y), \quad \ldots \quad f_m(y)$$

des fonctions algébriques ou transcendantes bien déterminées, r une racine simple de l'équation $f_0(y) = 0$ et

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} y = a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \ldots \\ + \frac{a_n}{1.2.3\ldots n} x^n + \mathrm{R} = a + \mathrm{X} \end{aligned} \right.$$

une racine commune des équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) \\ & \quad + x^3 f_3(y) + \ldots + x^m f_m(y) = 0 \end{aligned} \right.$$

et

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} & y - r + x\,\mathrm{F}_1(y) + x^2\,\mathrm{F}_2(y) \\ & \quad + x^3\,\mathrm{F}_3(y) + \ldots + x^m\,\mathrm{F}_m(y) = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathrm{F}_1(y) = \frac{f_1(y)}{\Phi(y)}, \qquad \mathrm{F}_2(y) = \frac{f_2(y)}{\Phi(y)},$$

$$\mathrm{F}_3(y) = \frac{f_3(y)}{\Phi(y)}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_m(y) = \frac{f_m(y)}{\Phi(y)},$$

$$\Phi(y) = \frac{f_0(y)}{y - r}, \qquad \Phi(r) = f_0'(r), \qquad \Phi^n(r) = \frac{f_0^{(n+1)}(r)}{n+1}.$$

Nous nous proposons ici de déterminer les coefficients

$$a, \quad \frac{a_1}{1!}, \quad \frac{a_2}{2!}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{n!},$$

dans la série (1).

2. Si $\mathrm{F}(u)$, $\mathrm{F}'(u)$, ..., $\mathrm{F}^{(n+1)}(u)$, pour les valeurs de u comprises entre $u_0 = f(\xi)$ et $u = f(\xi + z)$, et $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n+1)}(t)$, pour les valeurs de t comprises entre $t_0 = \xi$ et $t = \xi + z$, sont des fonctions finies et continues, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{F}[f(\xi + z)] \\ & = \Big\{ \mathrm{F}(u_0) + \frac{(u - u_0)}{1} \mathrm{F}'(u_0) + \ldots \\ & \quad + \frac{(u - u_0)^n}{1.2\ldots n} \mathrm{F}^{(n)}(u_0) \\ & \quad + \frac{(u - u_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n-1)} \mathrm{F}^{(n+1)}[u_0 - \theta(u - u_0)] \Big\}_{u = f(\xi+z),\ u_0 = f(\xi)}. \end{aligned} \right.$$

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
& f(\xi + z) \\
&\quad = f(\xi) + z f'(\xi) + z^2 \frac{f''(\xi)}{2!} + \ldots \\
&\qquad + z^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + z^{n+1} f^{(n+1)} \frac{(\xi + \theta_1 z)}{(n+1)!} \\
&\quad = C + C_1 z + \frac{C_2}{2!} z^2 + \frac{C_3}{3!} z^3 + \ldots \\
&\qquad + \frac{C_n}{n!} z^n + z^{n+1} f^{(n+1)} \frac{(\xi + \theta_1 z)}{(n+1)!},
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$C = f(\xi), \qquad C_n = f^{(n)}(\xi).$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (4), $f(\xi + z)$ par la série (5), on obtient

$$F[f(\xi + z)] = F[f(\xi)] + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \ldots + q_n z^n + \ldots$$

et

$$
\frac{\left\{ D_z^n F[f(\xi + z)] \right\}_{z=0}}{1.2\ldots n}
= q_n = \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \left(\frac{c_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{c_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{c_3}{3!}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\frac{c_n}{n!}\right)^{\alpha_n},
$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Mais

$$D_z^n F[f(\xi + z)] = D_\xi^n F[f(\xi + z)],$$
$$\left\{ D_z^n F[f(\xi + z)] \right\}_{z=0} = \left\{ D_\xi^n F[f(\xi + z)] \right\}_{z=0} = D_\xi^n F[f(\xi)];$$

par conséquent

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
& D_\xi^n F[f(\xi)] \\
&\quad = n! \sum \frac{F^{(i)}[f(\xi)]}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_n!} \\
&\qquad \times \left[\frac{f'(\xi)}{1!}\right]^{\alpha_1} \left[\frac{f''(\xi)}{2!}\right]^{\alpha_2} \left[\frac{f'''(\xi)}{3!}\right]^{\alpha_3} \cdots \left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\right]^{\alpha_n} \\
&\quad = n! \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha!\ldots\alpha_n!} \\
&\qquad \times \left(\frac{c_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{c_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{c_3}{3!}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\frac{c_n}{n!}\right)^{\alpha_n} = D_\xi^n F(c),
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(J. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 308).

3. Maintenant substituons $a + X$ au lieu de y, dans les équations (2) et (3), et supposons que les fonctions $f_0(a+X)$, $f_1(a+X)$, $f_2(a+X)$, $\ldots\ldots f_m(a+X)$, $F_1(a+X)$, $F_2(a+X)$, $\ldots$, $F_m(a+X)$ soient développables suivant les puissances croissantes de X; on obtient alors, au moyen de la formule de Taylor,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_0(a) + X f_0'(a) + \frac{X^2}{2!} f_0''(a) + \ldots + \frac{X^n}{n!} f_0^{(n)}(a) + R_1 \\ & + x\left[f_1(a) + X f_1'(a) + \frac{X^2}{2!} f_1''(a) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}(a) + R_2 \right] \\ & + x^2\left[f_2(a) + X f_2'(a) + \frac{X^2}{2!} f_2''(a) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} f_2^{(n-2)}(a) + R_3 \right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x^{m-2}\left[f_{m-2}(a) + X f_{m-2}'(a) + \frac{X^2}{2!} f_{m-2}''(a) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} f^{(n-m+2)}(a) + R_{m-1} \right] \\ & + x^{m-1}\left[f_{m-1}(a) + X f_{m-1}'(a) + \frac{X^2}{2!} f_{m-1}''(a) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} f_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R_m \right] \\ & + x^m\left[f_m(a) + X f_m'(a) + \frac{X^2}{2!} f_m''(a) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} f_m^{(n-m)}(a) + R_{m+1} \right] = 0 \, (n > m) \end{aligned} \right.$$

et

$$
(8)\quad\left\{
\begin{aligned}
&a - r + X + x\Big[F_1(a) + X F_1'(a) + \frac{X^2}{2!} F_1''(a) + \dots \\
&\qquad\qquad + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} F_1^{(n-1)}(a) + R_1'\Big] \\
&\quad + x^2\Big[F_2(a) + X F_2'(a) + \frac{X^2}{2!} F_2''(a) + \dots \\
&\qquad\qquad + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} F_2^{(n-2)}(a) + R_2'\Big] \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad + x^{m-2}\Big[F_{m-2}(a) + X F_{m-2}'(a) \\
&\qquad + \frac{X^2}{2!} F_{m-2}''(a) + \dots \\
&\qquad + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} F_{m-2}^{(n-m+2)}(a) + R_{m-2}'\Big] \\
&\quad + x^{m-1}\Big[F_{m-1}(a) + X F_{m-1}'(a) \\
&\qquad + \frac{X^2}{2!} F_{m-1}''(a) + \dots \\
&\qquad + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} F_{m-1}^{(n-m+1)}(a) + R_{m-1}'\Big] \\
&\quad + x^m\Big[F_m(a) + X F_m'(a) + \frac{X^2}{2!} F_m''(a) + \dots \\
&\qquad\qquad + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} F_m^{(n-m)}(a) + R_m'\Big] = 0 \; (n > m),
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$X = a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n!} x^n + R.$$

De l'identité (7), en y égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on déduit

$$
\begin{aligned}
f_0(a) &= 0, \\
a_1 f_0'(a) + f_1(a) &= 0, \\
\frac{a_2}{1.2} f_0'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f_0''(a) + a_1 f_1'(a) + f_2(a) &= 0, \\
\frac{a_3}{1.2.3} f_0'(a) + \frac{a_1 a_2}{1.2} f_0''(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f_0'''(a) & \\
+ \frac{a_2}{1.2} f_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f_1''(a) + a_1 f_2'(a) + f_3(a) &= 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{aligned}
$$

en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ et en ayant égard à la formule (6), on a généralement

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&D_\xi^p \frac{f_0(a)}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \ldots \\
&\qquad + D_\xi^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi f_{p-1}(a) + f_p(a) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&D_\xi^n \frac{f_0(a)}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + \ldots \\
&\qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$p \leqq m, \qquad n \geqq m$$

et

$$D_\xi^k \frac{f_h}{k!}(a) = \sum \frac{f_h^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

L'identité (8) donne

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a - r = 0, \\
&a_1 - F_1(a) = 0, \\
&\frac{a_2}{1.2} + a_1 F'_1(a) + F_2(a) = 0, \\
&\frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_2}{1.2} F'_1(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F''_1(a) + a_1 F'_2(a) + F_3(a) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{a_p}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \ldots \\
&\qquad + D_\xi^2 \frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{a_n}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \ldots \\
&\qquad + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$0 < p \leqq m, \qquad n \geqq m$$

et

$$D_\xi^k \frac{F_h(a)}{k!} = \sum \frac{F_h^{(i)}(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k}$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Des égalités précédentes on tire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
a &= r,\\
a_1 &= -\left[\frac{f_1(a)}{f_0'(a)}\right]_{a=r} = -[F_1(a)]_{a=r},\\
\frac{a_2}{1.2} &= -\left\{\frac{1}{f_0'(a)}\left[\frac{a_1^2}{1.2} f_0''(a) + a_1 f_1'(a) + f_2(a)\right]\right\}_{a=r}\\
&= -[a_1 F_1'(a) + F_2(a)]_{a=r},\\
\frac{a_3}{1.2.3} &= -\left\{\frac{1}{f_0(a)}\left[\frac{a_1 a_2}{1.2} f_0''(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f_0'''(a)\right.\right.\\
&\qquad + \frac{a_2}{1.2} f_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f_1''(a)\\
&\qquad \left.\left. + a_1 f_2'(a) + f_3(a)\right]\right\}_{a=r}\\
&= -\left[\frac{a_2}{1.2} F_1'(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F_1''(a) + a_1 F_2'(a) + F_3(a)\right]_{a=r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{a_p}{1.2\ldots p} &= -\left(\frac{1}{f_0'(a)}\left\{\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{p-1}!}\right.\right.\\
&\qquad \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{p-1}}{(p-1)!}\right]^{\beta_{p-1}}\\
&\qquad + D_\xi^{p-1}\frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2}\frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \ldots\\
&\qquad \left.\left. + D_\xi^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi f_{p-1}(a) + f_p(a)\right\}\right)_{a=r}\\
&= -\left[D_\xi^{p-1}\frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2}\frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \ldots\right.\\
&\qquad \left. + D_\xi^2\frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a)\right]_{a=r}\\
&= -\left[\sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k}\frac{F_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$
(11)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{a_n}{1.2\ldots n} &= -\left\{\frac{1}{f_0'(a)}\left[\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{n-1}!}\right.\right.\\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]_{\beta_{n-1}}\\
&\qquad\qquad + D_\xi^{n-1}\frac{f_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2}\frac{f_2(a)}{(n-2)!}+\ldots\\
&\qquad\qquad + D_\xi^{n-m+1}\frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!}\\
&\qquad\qquad\qquad\left.\left. + D_\xi^{n-m}\frac{f_m(a)}{(n-m)!}\right]\right\}_{a=r}\\
&= -\left[D_\xi^{n-1}\frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2}\frac{F_2(a)}{(n-2)!}+\ldots\right.\\
&\qquad \left. + D_\xi^{n-m+1}\frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m}\frac{F_m(a)}{(n-m)!}\right]_{a=r}\\
&= -\left[\sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k}\frac{F_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r}
\end{aligned}\right.
$$

où

$$n > m \geqq p > 0$$

et

$$
\begin{gathered}
1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (p-1)\beta_{p-1} = p.\\
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{p-1} = j = 2, 3, \ldots, p,\\
1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (n-1)\beta_{n-1} = n,\\
\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = j = 2, 3, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

Par conséquent on a

$$
(12)\quad\left\{
\begin{aligned}
y = r - \frac{1}{f_0'(r)}\Bigg\{ & x f_1(r) + x^2\left[S_2 + \sum_{k=1}^{k=2} D_\xi^{2-k}\frac{f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r}\\
& + x^3\left[S_3 + \sum_{k=1}^{k=3} D_\xi^{3-k}\frac{f_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} + \ldots\\
& + x^p\left[S_p + \sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k}\frac{f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} + \ldots\\
& + x^n\left[S_n + \sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k}\frac{F_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} + \ldots\Bigg\}
\end{aligned}\right.
$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} y = r - x\,\mathrm{F}_1(r) - x^2 &\left[\sum_{k=1}^{k=2} \mathrm{D}_\xi^{2-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r} \\ &- x^3\left[\sum_{k=1}^{k=3} \mathrm{D}_\xi^{3-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\ &- x^p\left[\sum_{k=1}^{k=p} \mathrm{D}_\xi^{p-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\ &- x^m\left[\sum_{k=1}^{k=m} \mathrm{D}_\xi^{m-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(m-k)!}\right]_{a=r} - \ldots \\ &- x^n\left[\sum_{k=1}^{k=m} \mathrm{D}_\xi^{n-k}\,\frac{\mathrm{F}_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} - \ldots, \end{aligned}\right.$$

où

$$n \geqq m, \qquad m \geqq p > 1,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_k &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta!\,\ldots\,\beta_{k-1}!} \\ &\quad\times \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}} \\ &= \frac{1}{k!}\left[\mathrm{D}_\xi^k f_0(a) - a_k f_0'(a)\right], \end{aligned}$$

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (k-1)\beta_{k-1} = k,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \ldots, k;$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_\xi^k \mathrm{F}_h(a) &= \mathrm{D}_\xi^k \frac{f_h(a)}{\Phi(a)} = \mathrm{D}_\xi^k \frac{f_h(a)}{\left[\dfrac{f_0(a)}{a-r}\right]} \\ &= k!\sum \frac{\mathrm{D}_a^i \mathrm{F}_h(a)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k}, \\ \Phi^{(k)}(r) &= \frac{f_0^{(k+1)}(r)}{k+1}, \end{aligned}\right.$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k.$$

En généralisant la première formule (12), on obtient

$$(14)\quad \begin{cases} F(y) = F(r) + \frac{x}{1}\,[D_\xi F(a)]_{a=r} \\ \qquad + \frac{x^2}{1.2}\left[D_\xi^2 F(a)\right]_{a=r} + \frac{x^3}{1.2.3}\left[D_\xi^3 F(a)\right]_{a=r} + \ldots \\ \qquad + \frac{x^q}{1.2\ldots q}\left[D_\xi^q F(a)\right]_{a=r} + \ldots \text{ (1)}. \end{cases}$$

4. Considérons quelques cas particuliers :

1° Si l'on pose

$$f_0(y) = r - y, \qquad f_1(y) = f(y),$$
$$f_2(y) = 0, \qquad f_3(y) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m(y) = 0,$$

on a

$$y = r + xf(y)$$

ou

$$x = \frac{y-r}{f(y)} = \varphi(y), \qquad F_1(y) = -f(y)$$

et

$$y = \left[a + xf(a) + \frac{x^2}{1} D_\xi f(a) \right.$$
$$\left. + \frac{x^3}{1.2} D_\xi^2 f(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} D_\xi^{n-1} f(a) + \ldots \right]_{a=r}.$$

La formule de Lagrange, démontrée rigoureusement, dans ces derniers temps, par M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXIX, et *Cours d'Algèbre supérieure* par J.-A. Serret, 1885, t, I, p. 466),

(1) Les relations (9) et (10) peuvent être déduites des équations (2) et (3) aussi à l'aide de cette formule, en prenant

$$y = a + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{1.2} + \ldots.$$

donne

$$y = \left\{ a + x f(a) + \frac{x^2}{1.2} \mathrm{D}_a [f(a)]^2 \right.$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3} \mathrm{D}_a^2 [f(a)]^3 + \ldots$$
$$\left. + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_a^{n-1} [f(a)]^n + \ldots \right\}_{a=r}$$
$$= r + x f(r) + \frac{x^2}{1.2} \mathrm{D}_r [f(r)]^2$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3} \mathrm{D}_r^2 [f(r)]^3 + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \mathrm{D}_r^{n-1} [f(r)]^n + \ldots.$$

On a aussi (*Nouvelles Annales*, p. 362; 1888)

$$y = \left\{ a + x \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right] a + \frac{x^2}{1.2} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^2 a + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^n a + \ldots \right\}_{a=r}.$$

Par conséquent

$$\frac{a_n}{n!} = \left[\mathrm{D}_\xi^{n-1} \frac{f'(a)}{(n-1)!} \right]_{a=r}$$
$$= \left\{ \sum \frac{f^{(i)}(a)}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_{n-1}!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]^{\alpha_{n-1}} \right\}_{a=r,\, n-1}$$
$$= \left\{ \mathrm{D}_a^{n-1} \frac{[f(a)]^n}{n!} \right\}_{a=r}$$
$$= \sum (n-1)! \left[\frac{f(r)}{(n-i)!\, \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_{n-1}!} \right]^{n-i}$$
$$\times \left[\frac{f'(r)}{1!} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{f''(r)}{2!} \right]^{\alpha_2} \cdots \left[\frac{f^{(n-1)}(r)}{(n-1)!} \right]^{\alpha_{n-1}}_{n-1}$$
$$= \frac{1}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{\varphi'(a)} \mathrm{D}_a \right]^n a \right\}_{a=r},$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-1,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

2° Prenons

$$f_0(y) = f(y), \qquad f_1(y) = -1,$$
$$f_2(y) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m(y) = 0;$$

alors

$$f(y) = x, \qquad y = r + x\left[\frac{1}{\Phi(y)}\right], \qquad F_1(y) = -\frac{1}{\Phi(y)},$$

$$\Phi(y) = \frac{f(y)}{y-r}, \quad f(r) = 0,$$

$$\Phi(r) = f'(r), \quad \Phi^k(r) = \frac{f^{(k+1)}(r)}{k+1},$$

et

$$y = \left[a + x\frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^2}{1}D_\xi\frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^3}{1.2}D_\xi^2\frac{1}{\Phi(a)} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)}D_\xi^{n-1}\frac{1}{\Phi(a)} + \ldots\right]_{a=r}.$$

La formule de Lagrange donne

$$y = \Big\{a + x[\Phi(a)]^{-1} + \frac{x^2}{1.2}D_a[\Phi(a)]^{-2} + \frac{x^3}{1.2.3}D_a^2[\Phi(a)]^{-3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}D_a^{n-1}[\Phi(a)]^{-n} + \ldots\Big\}_{a=r}.$$

On a aussi

$$y = \Big\{a + x\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]a + \frac{x^2}{1.2}\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]^2 a + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]^n a + \ldots\Big\}_{a=r}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!} &= \Big\{D_\xi^{n-1}\frac{[\Phi(a)]^{-1}}{(n-)!}\Big\}_{a=r} \\
&= -\Big\{\frac{1}{f'(a)}\sum\frac{f^{(\nu)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{n-1}}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\right]^{\beta_{n-1}}\Big\}_{a=r,\, n>1} \\
&= \Big\{D_a^{n-1}\frac{[\Phi(a)]^{-n}}{n!}\Big\}_{a=r} = \sum\frac{(-1)^i(n+i-1)!\,[f'(r)]^{-(n+i)}}{n!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{n-1}!} \\
&\quad\times\left[\frac{f''(r)}{2!}\right]^{\alpha_1}\left[\frac{f'''(r)}{3!}\right]^{\alpha_2}\cdots\left[\frac{f_n(r)}{n!}\right]^{\alpha_{n-1}}_{n>1} = \frac{1}{n!}\Big\{\left[\frac{1}{f'(a)}D_a\right]^n a\Big\}_{a=r},
\end{aligned}$$

où

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = n-1,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = i = 1, 2, 3, \ldots, n-1,$$
$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + (n-1)\beta_{n-1} = n,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = j = 2, 3, \ldots, n.$$

3° Soit

$$f(x, y) = P_0(y) + x P_1(y) \\ + x_2 P_2(y) + \ldots + x^{m-1} P_{m-1}(y) + x^m P_m(y) = 0,$$

où

$$P_0(y) = A_0 y^m + B_0 y^{m-1} + C_0 y^{m-2} + \ldots + K_0 y^2 + L_0 y + M_0,$$
$$P_1(y) = A_1 y^{m-1} + B_1 y^{m-2} + C_1 y^{m-3} + \ldots + K_1 y + L_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$P_{m-1}(y) = A_{m-1} y + B_{m-1}, \; P_m(y) = A_m.$$

Alors, en faisant $\frac{y}{x} = u$ et $\frac{1}{x} = z$, on a aussi

$$x^m [Q_0(u) + z Q_1(u) \\ + z^2 Q_2(u) + \ldots + z^{m-1} Q_{m-1}(u) + z^m Q_m(u)] = 0,$$
$$Q_0(u) + z Q_1(u) + z^2 Q_2(u) + \ldots \\ + z^{m-1} Q_{m-1}(u) + z^m Q_m(u) = 0,$$

où

$$Q_0(u) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + A_2 u^{m-2} + \ldots + A_{m-1} u + A_m,$$
$$Q_1(u) = B_0 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} + B u^{m-3} + \ldots + B_{m-2} u + B_{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_{m-1}(u) = L_0 u + L_1, \; Q_m(u) = M_0.$$

Par suite, nous pouvons obtenir, dans ce cas, les séries suivantes

$$y = a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \ldots + \frac{a_n}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$
$$u = b + b_1 z + \frac{b_2}{1.2} z^2 + \frac{b_3}{1.2.3} z^3 + \ldots + \frac{b_n}{1.2\ldots n} z^n + \ldots$$

et

$$y = xu \\ = bx + b_1 + \frac{b_2}{1.2.x} + \frac{b_3}{1.2.3.x^2} + \ldots + \frac{b_n}{1.2\ldots n x^{n-1}} + \ldots,$$

où les coefficients $a, a_1, \ldots, \frac{a_n}{n!}$ et $b, b_1, \ldots, \frac{b_n}{n!}$ se détermineront au moyen des formules (11), en y remplaçant respectivement

$$f'_0(r),\quad f''_0(r),\quad \ldots,\quad f_k(r),\quad f'_k(r),\quad f''_k(r),\quad \ldots,$$

par

$$P'_0(r),\quad P''_0(r),\quad \ldots,\quad P_k(r),\quad P'_k(r),\quad P''_k(r),\quad \ldots,$$

et par

$$Q'_0(r_1),\quad Q''_0(r_1),\quad \ldots,\quad Q_k(r_1),\quad Q'_k(r_1),\quad Q''_k(r_1),\quad \ldots,$$

et en supposant que r, r_1 soient des racines simples des équations $P_0(y)=0$, $Q_0(u)=0$ respectivement (J.-A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, 1885, t. I, p. 610).

4° Enfin, posons, dans l'équation (2), $f_0(y)=r-y$; on a alors

$$y = r + xf_1(y) + x^2 f_2(y) + x^3 f_3(y) + \ldots + x^m f_m(y)$$

et

$$\begin{aligned} y = r & \\ & + xf_1(r) + x^2\left[\sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r} \\ & + x^3\left[\sum_{k=1}^{k=3} \frac{D_\xi^{3-k} f_k(a)}{(3-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^p\left[\sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_\xi^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^m\left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_\xi^{m-k} f_k(a)}{(m-k)!}\right]_{a=r} + \ldots \\ & + x^n\left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_\xi^{n-k} f_k(a)}{(n-k)!}\right]_{a=r} + \ldots; \end{aligned}$$

ou, généralement,

$$\begin{aligned}F(y) = F(r) &+ \frac{x}{1}[D_\xi F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x_2}{1.2}\left[D_\xi^2 F(a)\right]_{a=r} \\ &+ \frac{x_3}{1.2.3}\left[D_\xi^3 F(a)\right]_{a=r} + \ldots \\ &+ \frac{x^q}{1.2\ldots q}\left[D_\xi^q F(a)\right]_{a=r} + \ldots,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\left[\frac{D_\xi^q F(a)}{q!}\right]_{a=r} = \sum \frac{F^{(i)}(r)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_q!}&[f_1(r)]^{\alpha_1} \\ &\times\left[\sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_2} \ldots \\ &\times\left[\sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_\xi^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_p} \ldots \\ &\times\left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_\xi^{q-k} f_k(a)}{(q-k)!}\right]_{a=r}^{\alpha_q},\end{aligned}$$

$$(p \leqq m).$$

5. Soit

$$Y = \alpha + a_1 x + \frac{a_2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{a_m}{1.2\ldots m}x^m + \ldots$$

une racine de l'équation générale (algébrique ou transcendante)

$$f(y, x) = 0.$$

Prenons la fonction de t

$$\Phi(t) = f(y, x, t) = f(y, z),$$

où $z = xt$ et les variables y, x ne dépendent pas de t, de sorte que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^k f}{\partial t^k} = x^k \frac{\partial^k f}{\partial z^k},$$

et supposons que cette fonction, pour les valeurs de t

comprises entre o et 1, soit développable, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de t; on a alors

$$\begin{aligned} f(y, xt) = f(y, z) = \psi(t) &= \psi(0) + t\,\psi'(0) \\ &\quad + \frac{t^2}{1.2}\psi''(0) + \ldots + \frac{t^m}{1.2\ldots m}\psi^{(m)}(0) + \ldots \\ &= f(y, 0) + t\,x[D_z f(y, z)]_{z=0} \\ &\quad + \frac{t^2 x^2}{1.2}[D_z^2 f(y, z)]_{z=0} + \ldots \\ &\quad + \frac{t^m x^m}{1.2\ldots m}[D_z^m f(y, z)]_{z=0} + \ldots, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{gathered} f(y, 0) = f_0(y), \qquad [D_z f(y, z)]_{z=0} = f_1(y), \\ \left[\frac{D_z^2 f(y, z)}{1.2}\right]_{z=0} = f_2(y), \qquad \ldots, \\ \left[\frac{D_z^m f(y, z)}{1.2\ldots m}\right]_{z=0} = f_m(y), \qquad \ldots, \end{gathered}$$

on obtient, pour $t = 1$, $(z = x)$,

$$f(y, x) = f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + \ldots + x^m f_m(y) + \ldots = 0.$$

Par conséquent, en désignant par r une racine simple de l'équation $f(y, 0) = 0$ et en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$, on trouve à l'aide des formules (11), (12)

$$\begin{aligned} a &= r, \\ a_1 &= -\left[\frac{D_x f(a, x)}{D_a f(a, x)}\right]_{a=r,\, x=0}, \\ \frac{a_2}{1.2} &= -\left\{\frac{1}{D_a f(a, x)}\left[\frac{a_1^2}{1.2} D_a^2 f(a, x) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + a_1 D_a D_x f(a, x) + \frac{D_x^2 f(a, x)}{1.2}\right]\right\}_{a=r,\, x=0}, \end{aligned}$$

....,

$$\frac{a_m}{1.2\ldots m} = -\left(\frac{1}{D_a f(a,x)}\left\{\sum \frac{D_a^j f(a,x)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{m-1}} \times\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{m-1}}{(m-1)!}\right]^{\beta_{m-1}} + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}\,D_x^k f(a,x)}{(m-k)!\,k!}\right\}\right)_{a=r,\ x=0}$$

et

$$y = r - \frac{1}{[D_a f(a,x)]_{\substack{a=r\\x=0}}}\left\{x\,[D_x f(a,x)]_{\substack{a=r\\x=0}} + x^2\left[S'_2 + \sum_{k=1}^{k=2}\frac{D_\xi^{2-k}\,D_x^k f(a,x)}{(2-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + x^3\left[S'_3 + \sum_{k=1}^{k=3}\frac{D_\xi^{3-k}\,D_x^k f(a,x)}{(3-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + \ldots + x^m\left[S'_m + \sum_{k=1}^{k=m}\frac{D_\xi^{m-k}\,D_x^k f(a,x)}{(m-k)!\,k!}\right]_{\substack{a=r\\x=0}} + \ldots\right\},$$

où

$$S'_k = \sum \frac{D_a^j f(a,x)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{k-1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}}$$
$$= \frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f(a,x) - a_k D_a f(a,x)\right],$$

$$\frac{D_\xi^k D_x^h f(a,x)}{k!\,h!} = \sum \frac{D_a^i D_x^h f(a,x)}{h!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left[\frac{a_k}{k!}\right]^{\alpha_k},$$

$$\begin{aligned}
&1\,\beta_1 + 2\,\beta_2 + \ldots + (k-1)\,\beta_{k-1} = k,\\
&\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \ldots, k,\\
&1\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \ldots + k\,\alpha_k = k,\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = i = 1, 2, \ldots, k.
\end{aligned}$$

Aussi, en ayant égard à l'égalité

$$\frac{1}{k!}\left[D_\xi^k f_0(a) - a_k f'_0(a)\right]$$
$$= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_{k-1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\beta_2}\cdots\left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\right]^{\beta_{k-1}} = S_k,$$

nous pouvons exprimer une racine de l'équation $f(y, x) = 0$, et, par suite, celle de l'équation (2), de la manière suivante

$$y = r + x\left[\frac{a_1}{1!} - \sum_{k=0}^{k=1} \frac{D_\xi^{1-k} f_k(a)}{(1-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r}$$
$$+ x^2\left[\frac{a_2}{1!} - \sum_{k=0}^{k=2} \frac{D_\xi^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r}$$
$$+ x^3\left[\frac{a_3}{1!} - \sum_{k=0}^{k=3} \frac{D_\xi^{3-k} f_k(a)}{(3-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} + \ldots$$
$$+ x^m\left[\frac{a_m}{m!} - \sum_{k=0}^{k=m} \frac{D_\xi^{m-k} f_k(a)}{(m-k)!\,f'_0(a)}\right]_{a=r} + \ldots.$$