NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ BIENAYMÉ

Sur une génération des courbes planes unicursales du troisième et du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 144-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__144_1>

SUR UNE GÉNÉRATION DES COURBES PLANES UNICURSALES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. ANDRÉ BIENAYMÉ,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Lacour).

I. — COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

On sait que la projection sur un plan de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant une génératrice commune est une courbe unicursale du troisième ordre. Nous nous proposons, en partant de la description de la courbe de l'espace, d'arriver en Géométrie plane à une description de sa projection.

Or, *quand, autour de trois droites données dans l'espace, on fait tourner trois plans formant trois faisceaux homographiques, le point d'intersection de ces trois plans décrit une courbe gauche du troisième ordre* (CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 10 août 1857).

On pourrait déduire de là que la développable, ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche, est le lieu des droites interceptant sur trois faisceaux de plans homographiques trois divisions dont les six points doubles sont confondus en un seul point; ce point est celui où la droite qui décrit la développable touche l'arête de rebroussement.

Revenons à la génération de Chasles, appelons D, D_1, D_2 les trois droites fixes; les trois intersections des plans variables deux à deux engendrent trois surfaces du second ordre, admettant chacune comme génératrices d'un même système deux des trois droites fixes. Considérons en particulier les deux surfaces qui admettent pour génératrice commune D. Soit p un point de leur intersection, c'est-à-dire de la cubique gauche; en p passe sur chaque surface une génératrice de système différent de D, rencontrant, l'une D et D_1 en l et l_1, l'autre D et D_2 en m et m_2; on a

$$(m\ldots)=(l\ldots)$$

(en désignant ainsi l'homographie des deux divisions marquées par m et l), puisque m et l sont les points d'intersection de plans homologues (D_2, p) et (D_1, p) de deux faisceaux homographiques.

On peut donc dire :

Quand deux surfaces du second ordre ont une génératrice commune D, deux génératrices respectivement de système différent de celui de D dans chaque surface, et qui se coupent en un point variable de la cubique d'intersection, décrivent respectivement sur deux génératrices du premier système dans chaque surface deux divisions homographiques.

Les deux génératrices variables rencontrent respectivement les deux génératrices fixes en deux points que nous avons appelés l_1, m_2, et la droite $l_1 m_2$ rencontre D en un point f. On peut donc dire :

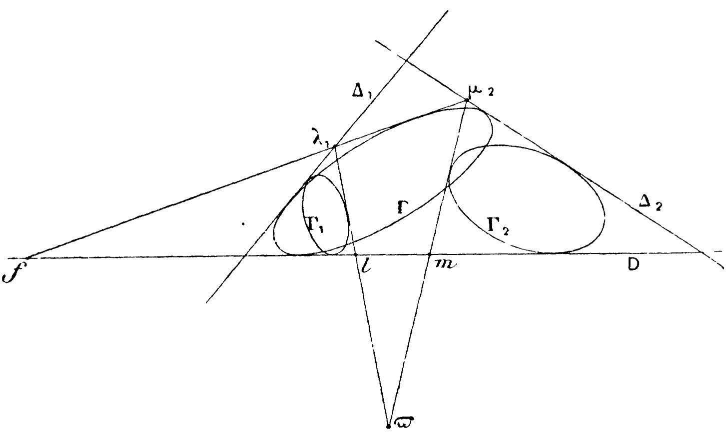
Étant données trois droites fixes D, D_1, D_2 *dans l'espace, une droite variable les rencontre en trois points f, l_1, m_2, on sait que $(f\ldots)=(l_1\ldots)=(m_2\ldots)$; sur* D *on prend deux divisions de points homographiques entre elles et aux précédentes, l et m, le point de concours des droites correspondantes, ll_1, mm_2, décrit une courbe gauche du troisième ordre.*

Il n'y a entre cette proposition et la description de Chasles qu'une différence d'énoncé, mais sous cette nouvelle forme la projection de la courbe de l'espace ou plutôt des éléments qui la déterminent est immédiate et nous sommes conduit à la proposition suivante dans le plan :

Proposition I. — *Soient, dans le plan, trois droites fixes* D, Δ_1, Δ_2, *et une droite variable qui les rencontre en des points* f, λ_1, μ_2, *décrivant trois divisions homographiques; sur* D *on prend deux divisions de points* l *et* m *homographiques entre elles et aux précédentes, le point de concours* ϖ *de* $l\lambda_1$ *et* $m\mu_2$ *décrit une courbe unicursale du troisième ordre.*

En effet (*fig.* 1), $f\lambda_1\mu_2$ enveloppe une conique Γ, tangente à D, Δ_1 et Δ_2; prenons un point de vue V et

Fig. 1.



D_2 arbitrairement dans le plan V Δ_2, considérons Δ_2 comme la projection de D_2 sur un plan passant par la droite D, qui, considérée dans l'espace, sera à elle-même sa projection dans le plan; μ_2 est la projection d'un point m_2 de D_2, $f\mu_2$ est la projection de fm_2; λ_1 est la projection d'un point l_1, intersection du plan fixe $V\Delta_1$ avec fm_2; toute la démonstration réside en ce que les points l_1 décrivent, dans le plan $V\Delta_1$, une droite D_1. Or $(f\ldots) = (\mu_2\ldots)$ par hypothèse, $(\mu_2\ldots) = (m_2\ldots)$, car le rapport anharmonique est projectif. Donc fm_2 dans l'espace engendre une surface du deuxième ordre S, admettant D et D_2 pour génératrices; mais le cône $V\Gamma$, de sommet V, de directrice Γ, est évidemment circonscrit à S, puisque toutes les génératrices fm_2 de S sont dans des plans $Vf\mu_2$ tangents au cône $V\Gamma$; le plan $V\Delta_1$ est tangent à ce cône : il coupe donc S suivant deux génératrices, dont l'une D_1 est le lieu des points l_1. Dès lors le point d'intersection de ll_1 et de mm_2 décrit une cubique gauche : donc sa projection ϖ décrit dans le plan une courbe du troisième ordre unicursale.

Les droites $l\lambda_1$ et $m\mu_2$ enveloppent chacune une conique; nous pouvons donc dire :

Étant données trois coniques Γ, Γ_1, Γ_2, *tangentes à une même droite* D, *soient* D_1 *et* D_2 *deux tangentes communes respectivement à* Γ *et* Γ_1, Γ *et* Γ_2; *une tangente variable à* Γ *rencontre* D_1 *et* D_2 *en deux points d'où l'on mène respectivement les secondes tangentes à* Γ_1 *et* Γ_2 : *l'intersection* p *de ces secondes tangentes décrit une courbe unicursale du troisième ordre.*

Cas particuliers. — En faisant se réduire à un système de deux points les coniques Γ_1 et Γ_2, ensemble ou séparément, Γ étant elle-même une conique véritable ou un système de deux points, on obtient différents énoncés conduisant à des cubiques unicursales particulières.

Donnons quelques exemples :

Proposition II. — *Par un point* G *d'une droite* D *on mène une transversale variable qui rencontre deux droites fixes* D_1, D_2 *en deux points* λ_1, μ_2; *de chacun de ces points respectivement on mène la seconde tangente à deux coniques* Γ_1, Γ_2, *tangentes respectivement à* D *et* D_1, D *et* D_2, *l'intersection des tangentes variables décrit une courbe unicursale du troisième ordre.*

Proposition III. — *Étant donnés une conique et un faisceau de droites, issues d'un point, qui correspondent anharmoniquement aux points dans lesquels une tangente variable rencontre une tangente fixe à cette conique, les rayons du faisceau rencontrent respectivement les tangentes en des points d'une cubique unicursale.*

Comme application de ce cas particulier, on peut démontrer la propriété bien connue de la podaire d'une parabole d'être une cubique unicursale.

Analogie avec la description des coniques de Chasles. — L'analogie est aussi complète qu'on peut le désirer, puisque dans le cas particulier de notre description où l'on suppose les deux coniques Γ_1 et Γ_2 décomposées en deux systèmes de deux points on retrouve la description des coniques de Chasles.

Remarquons que, lorsqu'une conique tangente à deux droites se décompose en un système de deux points, si l'un d'eux est le point d'intersection des deux droites, l'autre est arbitraire.

Faisons dégénérer en deux points les coniques Γ_1 et Γ_2 seulement, soient les points A et A', B et B', les points A' et B' étant choisis ainsi qu'il vient d'être dit; les droites $l\lambda_1$, $m\mu_2$ de la figure (1) passent par deux points fixes A, B, et forment deux faisceaux homographiques : donc leur intersection décrit une conique.

D'ailleurs, si l'on essayait de mettre le lieu décrit par leur intersection en perspective avec la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré, on verrait encore que ces deux surfaces ont une génératrice commune; mais toutes les génératrices de la première s'appuient sur VA (V étant le point de vue), et celles de la seconde sur VB : VA et VB sont donc deux génératrices de ces surfaces respectivement et V un point de leur intersection qui est du troisième degré; la perspective de cette courbe quand on prenait le point de vue sur elle devait bien être une conique.

Autre description des coniques. — Si l'on suppose que les deux coniques formatrices Γ_1 et Γ_2 du cas général soient confondues en une seule conique, on a la propriété suivante :

Proposition IV. — *Étant données deux coniques* C *et* Γ, *inscrites dans le triangle des trois droites* D, D_1, D_2, *si l'on fait tourner une tangente sur* Γ, *et que des points* l_1, m_2 *où elle rencontre* D_1 *et* D_2 *on mène les secondes tangentes à* C, *leur intersection* p *décrit une conique.*

Ceci se voit directement par la mise en perspective. Soient l et m les points d'intersection de l_1p, m_2p avec D. Les droites ll_1 et mm_2 peuvent être regardées comme les projections des génératrices de deux surfaces du second degré inscrites dans le cône ayant pour sommet le point de vue et pour base C; donc ces deux surfaces sont bitangentes, donc elles se coupent suivant deux courbes planes; or D fait déjà partie de leur intersection; elles admettent donc une deuxième génératrice commune (qui se projette suivant la quatrième tangente commune à C et à Γ); et une conique véritable, reste de leur intersection, se projette suivant le lieu de p.

Application. — On fera se réduire la conique Γ à un système de deux points. On retrouvera par là que le sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à la parabole décrit une conique.

II. — Courbes du quatrième ordre.

Par induction nous énoncerons la description des quartiques unicursales planes, en enlevant au mode de génération donné pour les cubiques la particularité que présentent les trois coniques Γ, Γ_1, Γ_2, d'admettre une tangente commune.

Proposition V. — *Si deux tangentes variables à deux coniques décrivent sur deux tangentes fixes deux divisions homographiques, l'intersection des deux tangentes variables engendre une courbe unicursale du quatrième ordre.*

Pour le vérifier, projetons les coniques formatrices suivant deux cercles,

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha-\mathrm{R}=0$$

est l'équation d'une tangente à l'un d'eux, α étant l'angle du point du rayon de contact avec un rayon fixe, le rayon allant au point de contact de la tangente fixe, par exemple; si nous posons $\tan \frac{\alpha}{2}=t$, $\mathrm{R}t$ représente l'abscisse du pied de la tangente variable sur la tangente fixe, comptée à partir du point de contact de cette dernière.

Un point du lieu est donc à l'intersection des droites

$$(1)\qquad (x-a)(1-t^2)+2t(y-b)-\mathrm{R}(1+t^2)=0$$

et

$$(2)\qquad (x-a')(1-t'^2)+2t'(y-b')-\mathrm{R}'(1+t'^2)=0,$$

t et t' étant liés par la relation homographique

$$\lambda tt' + \mu t + \nu t' + \rho = 0;$$

tirant t' en fonction de t et portant dans (2), on obtient une équation de la forme

$$A' t^2 + B' t + C' = 0,$$

qui, jointe à l'équation (1) que l'on peut écrire

$$A t^2 + B t + C = 0,$$

permet de construire le lieu, A, B, C, A′, B′, C′ étant linéaires par rapport aux coordonnées d'un point de la courbe.

On a donc bien une quartique unicursale. Les deux coniques

$$\begin{cases} AB' - BA' = 0, \\ BC' - CB' = 0 \end{cases}$$

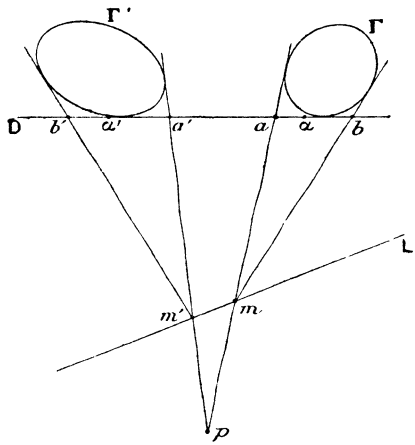
donnent par leur intersection les trois points doubles de la quartique et la solution étrangère

$$\begin{cases} B = 0, \\ B' = 0. \end{cases}$$

Autre démonstration du degré de la courbe obtenue d'après la construction précédente. — Considérons (*fig.* 2) les deux coniques formatrices Γ, Γ'; deux tangentes variables, pa et pa', sont assujetties à décrire sur une tangente commune D deux divisions de points $(a\ldots) = (a'\ldots)$. Soit une droite L, m et m' ses points d'intersection avec pa et pa', de m menons la seconde tangente à Γ et de m' à Γ', soient mb et $m'b'$ ces deux droites.

Quand m décrit L, à chaque point de L correspondent simultanément et indistinctement deux points a et b de D, mais à un point de D ne correspond qu'un seul point m de L. Donc, en vertu du principe de correspondance de Chasles, les segments ab sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points m, de même les segments $a'b'$ sont en involution et cor-

Fig. 2.



respondent anharmoniquement aux points m'. C'est-à-dire que, si nous prenons les points $\alpha \ldots$, $\alpha' \ldots$, qui sont conjugués harmoniques, par rapport à a et b et par rapport à a' et b' respectivement, de deux points fixes arbitraires de D, nous avons

$$(m \ldots) = (\alpha \ldots) \qquad \text{et} \qquad (m' \ldots) = (\alpha' \ldots).$$

Prenons pour ces deux points fixes le point à l'infini de D, α est milieu de ab, et α' de $a'b'$. Si donc nous désignons par a, b, ... les abscisses des points a, b, ... comptées à partir d'origines arbitraires sur D et sur L, nous avons les cinq équations

$$(1) \qquad aa' + Ua + Va' + W = 0.$$

$$(2) \qquad a'^2 - 2a'\alpha' + A'\alpha' + B' = 0,$$

$$(3) \qquad a^2 + 2a\alpha + A\alpha + B = 0,$$

$$(4) \qquad \alpha m + \lambda\alpha + \mu m + \rho = 0,$$

$$(5) \qquad \alpha' m' - \lambda'\alpha' + \mu' m' + \rho' = 0,$$

pour qu'un point de L soit point du lieu (*fig.* 2), il faut de plus la condition

$$m = m':$$

portant cette condition dans (4) et (5), nous obtenons

$$\frac{\lambda\alpha + \rho}{\alpha + \mu} = \frac{\lambda'\alpha' + \rho'}{\alpha' + \mu'}$$

ou

$$\alpha' = \frac{M\alpha + N}{L\alpha + P}.$$

Or (1) et (2) nous font également connaître α', car tirant de (1)

$$a' = -\frac{Ua + W}{a + V},$$

et portant dans (2), il vient

$$(Ua + W)^2 + 2\alpha'(a + V) + (A'\alpha' + B')(a + V)^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha' = \frac{Qa^2 + Ra + S}{Q'a^2 + R'a + S'};$$

égalant les deux valeurs de α' tirées l'une de (4) et (5), l'autre de (1) et (2), il vient

$$\alpha = \frac{Xa^2 + Ya + Z}{X'a^2 + Y'a + Z'};$$

portant cette valeur dans (3), on obtient une équation du quatrième degré en a

$$\Delta_4 a^4 + \Delta_3 a^3 + \Delta_2 a^2 + \Delta_1 a + \Delta = 0,$$

dont les quatre racines font connaître quatre points a, donc quatre points m du lieu sur L.

Application. — Comme application, retrouvons que le limaçon de Pascal est une quartique unicursale. On sait engendrer le limaçon par le sommet A d'un angle de grandeur constante, droit par exemple, dont les côtés restent tangents à deux cercles C_1 et C_2.

Considérons une tangente commune à C_1 et C_2; montrons que les deux côtés de l'angle droit décrivent sur elle deux divisions homographiques. Or deux tangentes parallèles aux deux cercles décrivent sur elle deux divisions semblables et, d'autre part, deux tangentes rectangulaires à un même cercle décrivent évidemment aussi sur une tangente fixe deux divisions homographiques; donc le limaçon est retrouvé comme cas particulier de notre génération.

Intersection de la quartique avec les sécantes communes aux coniques fomatrices Γ_1, Γ_2. — Projetons les deux coniques Γ_1 et Γ_2 suivant deux cercles C_1 et C_2; on a facilement les directions asymptotiques dans ce cas particulier. En effet, considérons deux tangentes fixes à C_1 et C_2, D_1 et D_2; les deux tangentes variables Δ_1 et Δ_2, dont l'intersection décrit la courbe, donnent sur D_1 et D_2 deux divisions $(m_1 \ldots) = (m_2 \ldots)$; $m_1 m_2$ enveloppe une conique C tangente à D_1 et D_2; autour de C_1 et C_2 faisons tourner deux tangentes parallèles qui marquent sur D_1 et D_2 les divisions $(n_1 \ldots) = (n_2 \ldots)$; $n_1 n_2$ enveloppe une conique N tangente à D_1 et D_2; C et N admettent deux tangentes communes différentes de D_1 et D_2; l'une quelconque de ces deux tangentes donne sur D_1 et D_2 deux points homologues des divisions $m_1 \ldots$ et $m_2 \ldots$, par où passent deux droites Δ_1 et Δ_2 correspondantes et parallèles.

La conique N fait donc connaître deux directions asymptotiques de la quartique. Mais on peut s'assurer qu'il existe deux coniques N distinctes et deux seulement; donc on détermine les quatre directions asymptotiques dans le cas où les deux coniques formatrices sont deux cercles, et généralement on peut au moyen de six couples de deux coniques déterminer les vingt-quatre points d'intersection de la quartique et des six sécantes communes aux deux coniques formatrices.

Dans le cas de la cubique, C, C_1, C_2 ont une tangente commune, tangente à l'une des coniques N qui n'admet plus avec C qu'une tangente commune intéressante ici.