NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur les droites qu'on peut placer sur une surface de troisième classe ou de troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 138-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__138_1>

SUR LES DROITES QU'ON PEUT PLACER SUR UNE SURFACE DE TROISIÈME CLASSE OU DE TROISIÈME ORDRE;

PAR M. E. G.,
Ancien élève du lycée de Reims.

Je rappellerai d'abord le théorème suivant :

La surface engendrée par les droites joignant les points homologues de deux divisions homographiques dont les bases ne sont pas dans un même plan est une surface réglée de deuxième classe.

Si l'homographie est exprimée par l'équation

$$A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D = 0,$$

la surface se réduit à deux plans quand on a

$$AD - BC = 0$$

ou

$$B = C = D = 0,$$

c'est-à-dire quand il existe sur chaque base un point tel que le point homologue puisse être quelconque sur l'autre base.

Cela posé, soient 3 divisions tracées sur 3 droites quelconques A, B, C. Nous dirons qu'elles sont homographiques si à 2 points pris sur 2 quelconques d'entre elles, l'un sur A, l'autre sur B, par exemple, en correspond un seul sur la troisième C. La relation la plus générale sera

$$(1)\quad A\alpha\beta\gamma + B\beta\gamma + C\gamma\alpha + D\alpha\beta + E\alpha + F\beta + G\gamma + H = 0,$$

α, β, γ étant les abscisses comptées respectivement sur A, B, C à partir d'origines quelconques.

Si 3 divisions homographiques sont tracées sur une même base, il y a 3 points triples.

La même définition s'appliquerait à 3 faisceaux de plans passant par des droites fixes. Il y a 3 plans triples quand les 3 faisceaux passent par la même droite.

Étant données 3 divisions homographiques tracées sur 3 bases quelconques, il y a 3 systèmes de points homologues en ligne droite.

En effet, soient a, b, c trois points homologues situés respectivement sur les 3 bases A, B, C. Joignons bc et menons un plan par cette droite et par chacune des droites B et C. Ces 2 plans rencontrent la droite A en b' et en c' et les 3 points a, b', c' tracent sur A 3 divisions homographiques, car à a et à b' correspond un seul point c' et à b' et c' correspond un seul point a. Ces 3 divisions tracées sur une même base ont 3 points triples correspondant chacun à 3 points a, b, c, situés en ligne droite.

Les plans déterminés par les points homologues de 3 divisions homographiques de bases quelconques enveloppent une surface de troisième classe.

En effet, si l'on mène des plans par une droite quelconque et par les points des 3 divisions, on obtient 3 faisceaux homographiques. Il y a 3 plans triples qui sont les plans tangents qu'on peut mener à la surface par la droite considérée. Les 3 bases sont situées sur la surface, car tout plan passant par l'une d'elles contient 3 points homologues.

Réciproquement, les plans tangents à une surface de troisième classe déterminent sur 3 droites A, B, C, situées sur la surface, 3 divisions homographiques.

En effet, prenons un point sur B et un sur C. Par la droite qui joint ces 2 points on peut mener 3 plans tangents à la surface. Deux d'entre eux passent par les 2 droites B et C et le troisième détermine sur l'autre droite A un seul point.

Une surface de troisième classe peut toujours être considérée comme enveloppe de plans passant par les points homologues de 3 divisions homographiques. Il suffit de faire voir qu'elle est assujettie au même nombre de conditions. Une surface de troisième classe est déterminée par 19 plans tangents. Or une droite équivaut à 4 conditions puisqu'il faut que 4 plans tangents passent par cette droite pour qu'elle soit sur la surface. Donc 3 droites équivalent à 12 conditions. La relation de l'homographie en donne 7; en tout 19.

Cela posé, soient A, B, C trois droites sur lesquelles sont tracées 3 divisions homographiques liées par la relation (1). Les plans qui passent par 3 points homologues enveloppent une surface Σ qui contient les 3 droites A, B, C.

Désignons par a un point de la droite A dont l'abscisse soit $\alpha = a$. A ce point correspondent, sur B et C, 2 divisions homographiques dont l'équation est

$$(2)\quad (\mathrm{A}a + \mathrm{B})\beta\gamma + (\mathrm{D}a + \mathrm{F})\beta + (\mathrm{C}a + \mathrm{G})\gamma + \mathrm{E}a + \mathrm{H} = 0.$$

Les droites qui joignent les points homologues de ces 2 divisions engendrent une surface de deuxième classe S.

Au point a, le cône circonscrit à la surface Σ se réduit à la droite A et à un cône du second ordre circonscrit à la surface S. Dans le cas où celle-ci se réduit à 2 plans, ce dernier cône se réduit lui-même à 2 droites qui sont celles qui joignent le point a aux 2 points auxquels correspond un homologue quelconque. Ce cas se présente si l'on a

$$(3) \qquad (\mathrm{A}a+\mathrm{B})(\mathrm{E}a+\mathrm{H})-(\mathrm{D}a+\mathrm{F})(\mathrm{C}a+\mathrm{G})=0.$$

On en tire 2 valeurs a_1, a_2 de a, c'est-à-dire 2 points sur la droite A.

Les points correspondants sur B et C ont pour abscisses respectives

$$b_1=-\frac{\mathrm{C}a_1+\mathrm{G}}{\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_1+\mathrm{H}}{\mathrm{D}a_1+\mathrm{F}},$$
$$c_1=-\frac{\mathrm{D}a_1+\mathrm{F}}{\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_1+\mathrm{H}}{\mathrm{C}a_1+\mathrm{G}},$$
$$b_2=-\frac{\mathrm{C}a_2+\mathrm{G}}{\mathrm{A}a_2+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_2+\mathrm{H}}{\mathrm{D}a_2+\mathrm{F}},$$
$$c_2=-\frac{\mathrm{D}a_2+\mathrm{F}}{\mathrm{A}a_2+\mathrm{B}}=-\frac{\mathrm{E}a_2+\mathrm{H}}{\mathrm{C}a_2+\mathrm{G}},$$

au point

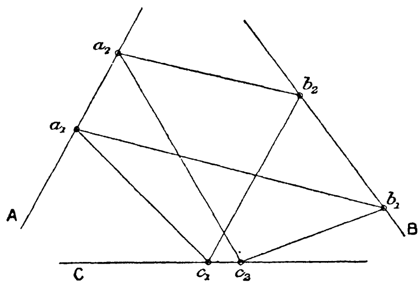
a_1	correspondent	b_1,	c_1,
a_2	»	b_2,	c_2.

On vérifierait aisément que les points analogues à a_1, a_2 sur les 2 autres droites sont b_1, b_2, c_1, c_2 et qu'au point

b_1	correspondent	a_1,	c_2,
b_2	»	a_2,	c_1,
c_1	»	a_1,	b_2,
c_2	»	a_2,	b_1.

Les 6 droites ainsi obtenues sont situées sur la surface. Elles forment avec les 3 premières un système de 9 droites où chacune en rencontre 4 autres. Elles se rencontrent 3 à 3 en 6 points.

Cela posé, je dis que toute droite située sur la surface Σ rencontre l'une au moins de ces 9 droites. En



effet, soit D une droite qui ne rencontre, par exemple, aucune des 3 droites A, B, C. Considérons les 3 divisions homographiques tracées sur les 3 droites A, B, D par les plans tangents à la surface. Il y a 3 systèmes de points homologues en ligne droite, et ces 3 droites, qui s'appuient sur A, B, D, sont situées sur la surface. De plus, elles ne peuvent pas rencontrer toutes trois la droite C, car si elles la rencontraient il y aurait 4 droites A, B, C, D qui s'appuieraient sur ces 3 droites.

Or nous venons de voir qu'il n'y a que 2 droites $a_2 b_2$ et $a_1 b_1$ s'appuyant sur A et B et ne rencontrant pas la droite C, lesquelles font partie des 9 droites précédemment trouvées. Donc la droite D rencontre au moins l'une de ces 2 droites.

Supposons maintenant que la surface S qui correspond à un point a de la droite A passe par ce point. On peut alors mener par ce point 2 génératrices de la surface S; l'une rencontre les 3 droites A, B, C, l'autre est du même système que B et C et ne rencontre que A. Ces 2 droites sont sur la surface Σ.

Or il y a sur la droite A trois points a_4, a_5, a_6 pour lesquels ce cas se présente, puisqu'il y a sur les 3 droites A, B, C trois systèmes de points homologues en ligne droite.

Il est facile de voir que la droite A ne peut pas être rencontrée par d'autres droites situées sur la surface Σ. Or, si l'on considère les 2 droites $b_1 c_2$ et $b_2 c_1$ qui ne la rencontrent pas et qui appartiennent au système des 9 déjà trouvées, les plans tangents à la surface déterminent sur ces 3 droites A, $b_1 c_2$, $b_2 c_1$ trois divisions homographiques. Il y a donc sur la surface 3 droites qui rencontrent ces 3 dernières. Ces droites ne peuvent être, d'après ce qui précède,, que celles issues des points a_4, a_5 et a_6 et ne rencontrant pas B et C.

On en peut conclure que toute droite située sur la surface Σ rencontre 3 droites du système des 9 premières. Or celles-ci peuvent se grouper de 6 manières en 3 droites ne se rencontrant pas. On a donc en tout sur la surface 27 droites :

1° Les 9 premières;

2° 18 droites s'appuyant chacune sur 3 des 9 précédentes.

Chacune de ces 27 droites possède évidemment les mêmes propriétés. Il en résulte que les 18 dernières peuvent se grouper 9 à 9 en 2 systèmes analogues au premier.

Ce groupement des 27 droites 9 à 9 est arbitraire et peut se faire d'une manière quelconque. Il ne dépend que du choix des 3 droites primitives A, B, C, lesquelles sont assujetties seulement à ne pas se rencontrer.

La transformation par polaires réciproques fournit les mêmes résultats relativement aux 27 droites qu'on peut placer sur une surface de troisième ordre. Dans la transformation les droites restent des droites, les points situés sur ces droites deviennent des plans qui les contiennent et réciproquement.