ERNEST JAGGI

Sur la résolution algébrique des équations

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 126-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__126_1>

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS;

PAR M. ERNEST JAGGI, à Besançon.

FORME UNIQUE DES n RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DU DEGRÉ n A UNE INCONNUE.

Soit

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

une équation algébrique en x dont les coefficients a_1, a_2, ..., a_n sont des quantités données quelconques. Si a_1, a_2, ..., a_n peuvent acquérir respectivement m_1, m_2, ..., m_n valeurs, l'équation précédente équivaut à une équation unique de degré $n \times m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ qui se décompose en $m_1 m_2 \ldots m_n$ équations de degré n, dans chacune desquelles chaque coefficient n'a que l'une des valeurs qui peuvent lui être attribuées.

Nous supposons donc que les coefficients de notre équation sont des quantités quelconques, mais n'ayant chacun qu'une valeur et nous cherchons une formule unique pour les n racines de l'équation. Si x_0, x_1, ..., x_{n-1} sont ces n racines dans un certain ordre, la formule unique cherchée devra, par certains changements dans les quantités qui y entrent, donner successivement x_0, x_1, ..., x_n. Ces changements peuvent être de deux sortes : soit des permutations des quantités qui entrent dans la formule, soit l'attribution à l'une des quantités de n valeurs différentes, les autres restant les mêmes; on ne peut attribuer à 2, 3, ... quantités des valeurs différentes en certains nombres que dans le cas où n serait un nombre de permutations, c'est-à-dire de la forme $1 2 \ldots m$, ou un produit de tels nombres. La première méthode a conduit Vandermonde et Lagrange à rechercher des fonctions des racines x_0, x_1, ..., x_{n-1} qui, par la permutation de ces racines dans ces fonctions donnent successivement ces racines elles-mêmes.

La seconde méthode conduit, il est vrai, aux mêmes fonctions, mais est plus rapide et surtout plus directe.

Si, par l'attribution de n valeurs différentes à l'une des quantités qui entrent dans la formule cherchée, on obtient les n racines, nous pouvons considérer cette formule comme étant l'expression d'une fonction d'une variable λ à laquelle on attribue successivement n valeurs λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1}, en sorte que nous pourrons écrire

$$x_0 = f(\lambda_0), \qquad x_1 = f(\lambda_1),$$
$$x_2 = f(\lambda_2), \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = f(\lambda_{n-1}).$$

Toute fonction $f(\lambda)$, qui n'a qu'une valeur pour une valeur donnée quelconque de λ, est susceptible de représenter successivement les n racines x_0, x_1, ..., x_n, pour des valeurs λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1} tirées de ces équations mêmes, et l'on pourrait se proposer d'étudier quelles sont les relations entre λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1}, a_1, a_2, ..., a_n pour une fonction f donnée, puis de rechercher quelle doit être f pour que ces relations soient les plus simples possibles. Mais comme ces relations dépendent, en général, de f et des coefficients a, on peut inversement se donner $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et chercher la fonction f; ce problème, qui n'est pas toujours soluble puisque f ne doit avoir qu'une valeur pour chacune des valeurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, est évidemment très difficile et sort des limites de l'Algèbre élémentaire dans laquelle nous voulons rester, car l'étude des équations algébriques en fait partie. Nous sommes donc conduits à choisir des systèmes de valeurs de λ et à essayer de trouver la fonction f. Or, on connaît la solution de certaines équations de degré n, par exemple celle de

$$x^n = 1,$$

et l'on sait aussi que dans toutes les autres équations que l'on sait résoudre entrent des radicaux qui, pris avec toutes leurs valeurs, donnent toutes les racines de ces équations; on a là un exemple où toutes les racines d'une même équation sont données par une fonction $f(\lambda)$, où λ a les n valeurs racines de $\lambda^n = 1$, les coefficients de λ étant des racines arithmétiques. Nous sommes donc conduits, dans le cas le plus général, à prendre pour $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ les racines de l'équation $\lambda^n = 1$ et à chercher la fonction f correspondante.

Mais ce problème est encore compliqué. Nous essayerons donc une fonction f donnée; une fonction rationnelle étant la plus simple des fonctions qui n'ont qu'une valeur pour $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, nous essayons la fonction

$$f(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

$\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ étant deux polynomes en λ. Grâce à la condition $\lambda^n = 1$, ces polynomes se réduisent à la forme

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1},$$
$$\psi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \ldots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1},$$

pour les valeurs λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1} de λ. Nous n'avons donc qu'à considérer la fonction

$$f(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1}}{\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \ldots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}},$$

ou plutôt les n valeurs de cette fonction pour $\lambda = \lambda_0$, λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1}. Pour ces valeurs de λ, cette fonction peut encore être mise sous une forme plus simple.

En effet,

$$\psi(\lambda_0)\psi(\lambda_1)\psi(\lambda_2)\ldots\psi(\lambda_{n-1})$$

est une fonction symétrique des n racines de $\lambda^n = 1$ et, par suite, est une constante indépendante de λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1}. Or si λ est une racine primitive de $\lambda^n = 1$, les n racines sont

$$\lambda^0, \quad \lambda, \quad \lambda^2, \quad \ldots, \quad \lambda^{n-1}.$$

Il s'ensuit que $f(\lambda)$, sous la forme

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}\,\frac{\psi(\lambda^0)\psi(\lambda^2)\ldots\psi(\lambda^{n-1})}{\psi(\lambda^0)\psi(\lambda^2)\ldots\psi(\lambda^{n-1})},$$

se réduit à un polynome de degré $(n-1)$, puisque le dénominateur est une constante et que le numérateur, produit de polynomes, est également un polynome. Si λ n'est pas une racine primitive de $\lambda^n = 1$, elle est racine primitive d'une équation $\lambda^{n'} = 1$, n' étant un diviseur de n ($n = mn'$); λ^0, λ, λ^2, ..., λ^{n-1} sont les n' racines de cette dernière équation, m fois répétées et $\psi(\lambda_0)$, $\psi(\lambda_1)$, ..., $\psi(\lambda_{n-1})$ ne contient également pas λ. Donc, dans tous les cas, nous n'avons qu'à prendre pour f une fonction de la forme

$$f(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + \ldots + b_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Reste à démontrer qu'on peut choisir les coefficients de manière que les n racines x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} soient

$$f(1), \quad f(\lambda), \quad f(\lambda^2), \quad \ldots, \quad f(\lambda^{n-1}),$$

λ étant une racine primitive de $\lambda^n = 1$. Soient

$$x_0 = f(1), \qquad x = f(\lambda),$$
$$x_2 = f(\lambda^2), \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = f(\lambda^{n-1}).$$

Les fonctions symétriques des racines $x_i = f(\lambda^i)$ sont alors des fonctions symétriques des racines $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}$ de l'unité; ces fonctions sont donc indépendantes de λ, c'est-à-dire qu'on aura

$$\begin{aligned}
a_1 &= - \varphi_1(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),\\
a_2 &= \quad \varphi_2(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_j &= (-1)^j \varphi_j(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n &= (-1)^n \varphi_n(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}),
\end{aligned}$$

$\varphi_j(b_0 b_1 \ldots b_{n-1})$ étant la somme des produits de j racines, c'est-à-dire une fonction rationnelle de $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Les égalités précédentes, au nombre de n, sont les conditions *nécessaires et suffisantes* auxquelles doivent satisfaire les quantités $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ pour que les racines se présentent sous la forme

$$x_i = f(\lambda^i) = b_0 + b_1\lambda^i + b_2\lambda^{2i} + b_3\lambda^{3i} + \ldots + b_{n-1}\lambda^{(n-1)i},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ces égalités sont donc les *équations* qui doivent déterminer les valeurs des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$; elles forment un système de n équations, chacune à n inconnues $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$; on sait qu'en général un tel système d'équations algébriques admet des solutions et en admet un nombre limité; mais on sait aussi que, dans certains cas, des équations algébriques sont incompatibles; la démonstration précédente ne deviendrait suffisante qu'en démontrant que les équations précédentes sont compatibles et, pour cela, il faudrait étudier les fonctions φ. Au lieu de cette méthode directe, nous pouvons employer pour notre *démonstration* un moyen détourné qui, sans donner actuellement d'indications pour la résolution des équations $\varphi_i = (-1)^i u_i$, démontre que cette résolution est possible, c'est-à-dire qu'on peut trouver des valeurs des coefficients b, telles que l'on ait

$$x_i = f(\lambda^i) = b_0 + b_1\lambda^i + b_2\lambda^{2i} + \ldots + b^p\lambda^{pi} - \ldots + b_{n-1}\lambda^{(n-1)i},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans les n égalités renfermées dans la précédente, considérons les n racines x_i comme des quantités connues, et voyons si, de ces égalités, on peut tirer les valeurs des quantités b'_p. Ces égalités forment un système de n équations du premier degré à n inconnues b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1} dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\
\lambda^0 & \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots & \lambda^p & \ldots & \lambda^{n-1} \\
(\lambda^2)^0 & (\lambda^2)^1 & (\lambda^2)^2 & (\lambda^2)^3 & \ldots & (\lambda^2)^p & \ldots & (\lambda^p)^{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda^p)^0 & (\lambda^p)^1 & (\lambda^p)^2 & (\lambda^p)^3 & \ldots & (\lambda^p)^p & \ldots & (\lambda^p)^{n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(\lambda^{n-1})^0 & (\lambda^{n-1})^1 & (\lambda^{n-1})^2 & (\lambda^{n-1})^3 & \ldots & (\lambda^{n-1})^p & \ldots & (\lambda^{n-1})^{n-1}
\end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
&(\lambda^1 - \lambda^0)\\
&\times(\lambda^2 - \lambda^1)(\lambda^2 - \lambda^0)\\
&\times(\lambda^3 - \lambda^2)(\lambda^3 - \lambda^1)(\lambda^3 - \lambda^0)\\
&\times(\lambda^4 - \lambda^3)(\lambda^4 - \lambda^2)(\lambda^4 - \lambda^1)(\lambda^4 - \lambda^0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\times(\lambda^p - \lambda^{p-1})(\lambda^p - \lambda^{p-2})(\lambda^p - \lambda^{p-3})\times\ldots\times(\lambda^p - \lambda^0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\times(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2})(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-3})\times\ldots\times(\lambda^{n-1} - \lambda^0).
\end{aligned}$$

Or nous avons supposé que λ était une racine primitive de l'équation $\lambda^n = 1$; il s'ensuit qu'aucun des facteurs du produit précédent n'est nul, puisque λ^0, λ^1, λ^2, ..., λ^{n-1} sont tous différents; le déterminant des équations n'étant pas nul, on en conclut que l'on peut déterminer les quantités b_p en fonction des x_i de manière que

$$x_i = b_0 + b_1\lambda^i + b_2\lambda^{2i} + \ldots + b_{n-1}\lambda^{(n-1)i},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Supposer que les x_i sont donnés est supposer simplement que les a_i sont donnés ; donc les équations

$$a_i = (-1)^i \varphi_i(b_0 b_1 \ldots b_{n-1})$$

sont compatibles et déterminent des quantités $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ telles que les racines x_i aient la forme indiquée. La résolution des équations

$$a_i = (-1)^i \varphi_i(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donne donc la résolution de l'équation algébrique générale du $n^{\text{ième}}$ degré à une inconnue.

La résolution des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré se fait ainsi très simplement et d'une manière uniforme.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Soit

$$x^2 + px + q = 0$$

l'équation proposée. Les racines de $\lambda^2 - 1$ étant 1 et -1, on aura

$$x_0 = b_0 + b_1,$$
$$x_1 = b_0 - b_1,$$

d'où

$$-p = x_0 + x_1 = 2b_0,$$
$$q = x_0 x_1 = b_0^2 - b_1^2.$$

Donc

$$b_0 = -\frac{p}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Prenant pour b_1 la valeur $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, on aura

$$x_0 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

En prenant pour b_1 la valeur $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, on aurait

$$x_0 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

qui est le même système de racines.

Remarque. — Connaissant b_0, on peut prendre pour inconnue

$$x - b_0 = z = x + \frac{p}{2};$$

l'équation se réduit alors à

$$z^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

qui a pour racines $+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ et $-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; on a alors immédiatement les deux valeurs de x par l'égalité

$$x = -\frac{p}{2} + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

Soit l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

et soit λ l'une des racines primitives de l'équation

$$\lambda^3 = 1.$$

On aura

$$\begin{aligned}
x_0 &= b_0 + b_1 + b_2,\\
x_1 &= b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2,\\
x_2 &= b_0 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
-p &= x_0 + x_1 + x_2 = 3b_0,\\
q &= x_0(x_1 + x_2) + x_1x_2\\
&= (b_0 + b_1 + b_2)[2b_0 + (b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2)]\\
&\quad + b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_0(b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2) + b_1b_2(\lambda + \lambda^2),\\
-r &= x_0x_1x_2\\
&= (b_0 + b_1 + b_2)\\
&\quad \times [b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_0(b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2) + b_1b_2(\lambda + \lambda^2)].
\end{aligned}$$

On a $\lambda + \lambda^2 = -1$; par suite, les équations deviennent

$$\begin{aligned}
-p &= 3b_0,\\
q &= (b_0 + b_1 + b_2)[2b_0 - (b_1 - b_2)]\\
&\quad + b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 - b_0(b_1 + b_2) - b_1b_2,\\
-r &= (b_0 + b_1 + b_2)[b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 - b_0(b_1 + b_2) - b_1b_2],
\end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned}
-p &= 3b_0,\\
q &= 3b_0^2 - 3b_1b_2,\\
-r &= b_0^3 + b_1^3 + b_2^3 - 3b_0b_1b_2.
\end{aligned}$$

La première de ces équations donne

$$b_0 = -\frac{p}{3};$$

la seconde

$$b_1b_2 = b_0^2 - \frac{q}{3} = \frac{p^2}{9} - \frac{q}{3};$$

la troisième

$$b_1^3 + b_2^3 = -r - b_0^3 + 3b_0b_1b_2$$

ou, en vertu de la seconde,

$$b_1^3 + b_2^3 = -r - (q - 2b_0^2)b_0 = -r + \frac{pq}{3} - 2\frac{p^3}{27};$$

b_1^3 et b_2^3 sont donc racines de l'équation du second degré

$$\beta^2 - \left(\frac{pq}{3} - r - \frac{2p^3}{27}\right)\beta + \left(\frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}\right)^3 = 0.$$

On prendra les racines cubiques des racines de cette équation et on les associera deux à deux, de manière que leur produit $b_1 b_2$ soit égal à $\frac{p^2}{9} - \frac{q}{3}$. On aura ainsi trois systèmes de valeurs de b_1 et b_2 donnant chacun les racines x sous la forme indiquée.

Remarque. — Connaissant b_0, on peut commencer par mettre l'équation sous la forme dite réduite

$$z^3 + p_1 z + q_1 = 0,$$

en posant

$$z = x - b_0 = x + \frac{p}{3} \qquad \text{ou} \qquad x = z - \frac{p}{3},$$

$$p_1 = q - \frac{p}{3}, \qquad q_1 = -\left(\frac{pq}{3} - r - \frac{2p^3}{27}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 - b_0 = b_1 + b_2, \\ z_1 &= x_1 - b_0 = b_1\lambda + b_2\lambda^2, \\ z_2 &= x_2 - b_0 = b_1\lambda^2 + b_2\lambda. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} p_1 &= z_0(z_1 + z_2) + z_1 z_2 \\ &= (b_1 + b_2)(b_1 + b_2)(\lambda + \lambda^2) + b_1 b_2(\lambda + \lambda^2) + b_1^2 + b_2^2 \\ &= -(b_1 + b_2)^2 - b_1 b_2 + b_1^2 + b_2^2 = -3 b_1 b_2, \\ -q_1 &= z_0 \times z_1 z_2 \\ &= (b_1 + b_2)[b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2(\lambda + \lambda^2)] = b_1^3 + b_2^3, \end{aligned}$$

ou enfin

$$b_1 b_2 = -\frac{p_1}{3},$$

$$b_1^3 + b_2^3 = -q_1:$$

b_1^3 et b_2^3 sont racines de l'équation du second degré

$$\beta^2 - q_1\beta - \frac{p_1^3}{27} = 0.$$

On associe les racines cubiques des deux valeurs de β de manière que leurs produits deux à deux soient égaux à $-\frac{p_1}{3}$, et l'on a les trois systèmes de valeurs de b_1 et b_2 qui, chacun, donnent les trois racines

$$z_{0,1,2} = x_{0,1,2} - b_0.$$

Si les valeurs prises pour b_1 et b_2 sont réelles, deux racines en z ou en x sont imaginaires, à moins que $b_1 = b_2$; la troisième racine est réelle; ce cas se présente lorsque les racines de l'équation en β sont réelles, c'est-à-dire lorsque

$$q_1^2 + \frac{4}{27}p_1^3 > 0.$$

Supposons, au contraire, qu'il n'y ait aucun des trois systèmes de valeurs de b_1, b_2 qui soit réel, c'est-à-dire que

$$q_1^2 + \frac{4}{27}p_1^3 < 0,$$

b_1^3 et b_2^3 sont imaginaires conjuguées, et il en est de même alors de b_1 et de b_2 (dont le produit est réel); il s'ensuit que, puisque λ et λ^2 sont imaginaires conjuguées, $b_1\lambda$ et $b_2\lambda^2$, d'une part, $b_1\lambda^2$ et $b_2\lambda$, d'autre part, sont aussi imaginaires conjuguées, ou enfin que x_0, x_1, x_2 sont toutes trois réelles. Il y a une racine double si $b_1 = b_2$, c'est-à-dire si

$$q_1^2 + \frac{4}{27}p_1^3 = 0.$$

$$x_1 = x_2 = b_0 + b_1(\lambda + \lambda^2) = b_0 - b_1.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Soit l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dans laquelle on a annulé le terme en x^3.

Les racines sont

$$\begin{aligned}
x_0 &= b_1 + b_2 + b_3,\\
x_1 &= b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3,\\
x_2 &= b_1\lambda^2 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2,\\
x_3 &= b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda
\end{aligned}$$

où

$$\lambda^4 = 1, \qquad \lambda = -\sqrt{-1}, \qquad \lambda^2 = -1, \qquad \lambda^3 = \sqrt{-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x_0 &= b_2 + b_1 + b_3,\\
x_1 &= -b_2 - (b_1 - b_3)\sqrt{-1},\\
x_2 &= b_2 - (b_1 + b_3),\\
x_3 &= -b_2 + (b_1 - b_3)\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer sur ces expressions qu'on peut associer les racines deux à deux pour en faire les racines de deux équations du second degré

$$\begin{matrix} x_0 \\ x_2 \end{matrix} = b_2 \pm (b_1 + b_3), \qquad \begin{matrix} x_1 \\ x_3 \end{matrix} = -b_2 \pm (b_1 - b_3)\sqrt{-1},$$

et ceci conduit à la méthode de résolution de Descartes.

Appliquons notre méthode ; nous aurons

$$\begin{aligned}
p &= x_0x_2 + x_1x_3 + (x_0 + x_2)(x_1 + x_3)\\
&= b_2^2 - (b_1 + b_3)^2 + b_2^2 + (b_1 - b_3)^2 + 2b_2(-2b_2)\\
&= -2b_2^2 - 4b_1b_3,\\
-q &= x_0x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3(x_0 + x_2)\\
&= [b_2^2 - (b_1 + b_3)^2](-2b_2) + [b_2^2 + (b_1 - b_3)^2]2b_2\\
&= -4b_2(b_1^2 - b_3^2),\\
r &= [b_2^2 - (b_1 + b_3)^2][b_2^2 + (b_1 - b_3)^2].
\end{aligned}$$

Des deux premières équations on tire $b_1 b_3$ et $b_1^2 + b_3^2$, que l'on porte dans la dernière, et l'on a l'équation en b_2 :

$$r = \left(2b_2^2 + \frac{q}{4b_2} + \frac{p}{2}\right)\left(2b_2^2 - \frac{q}{4b_2} + \frac{p}{2}\right)$$

ou

$$r = \left(2b_2^2 + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{16b_2^2},$$

équation du troisième degré en b_2^2. Ayant tiré b_2 de cette équation, on aura $b_1 b_3$ et $b_1^2 + b_3^2$ par les deux premières équations, et par suite b_1 et b_3 par une équation du second degré ou deux équations du premier degré.