NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SONDAT

Corrélation entre les hexagones de Pascal et de Brianchon

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 121-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__121_0>

CORRÉLATION ENTRE LES HEXAGONES DE PASCAL ET DE BRIANCHON;

Par M. P. SONDAT.

Soit une conique coupant les côtés BC, AC, AB d'un triangle ABC aux points α et α_1, β et β_1, γ et γ_1.

I. Désignons par I et I_1, H et H_1, K et K_1 les points $(\alpha\beta, \alpha_1\gamma_1)$ et $(\alpha\gamma, \alpha_1\beta_1)$, $(\alpha\beta, \beta_1\gamma_1)$ et $(\beta\gamma, \alpha_1\beta_1)$, $(\alpha\gamma, \beta_1\gamma_1)$ et $(\beta\gamma, \alpha_1\gamma_1)$.

Les hexagones

$$\begin{cases} \alpha\beta\beta_1\alpha_1\gamma_1\gamma, \\ \beta\alpha\alpha_1\beta_1\gamma_1\gamma, \\ \gamma\alpha\alpha_1\gamma_1\beta_1\beta \end{cases}$$

donnent naissance aux trois droites de Pascal

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{A\,I\,I_1}, \\ \mathrm{B\,H\,H_1}, \\ \mathrm{C\,K\,K_1}. \end{cases}$$

Or les trois triangles

$$\begin{cases} \mathrm{ABC}, \\ \mathrm{IHK}, \\ \mathrm{I_1H_1K_1}, \end{cases}$$

pris deux à deux, admettent pour axes d'homologie les trois pascales relatives au système

$$\begin{cases} \alpha\beta\,\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1, \\ \alpha\gamma_1\gamma\beta\,\beta_1\alpha_1, \\ \alpha\alpha_1\gamma\gamma_1\beta_1\beta, \end{cases}$$

lesquelles se rencontrent en l'un des vingt points de Steiner, car les hexagones ne diffèrent que par la permutation circulaire des sommets de rang pair. Ces triangles ont donc un centre commun d'homologie, ou les droites (1) sont concourantes en un point O, qui est l'un des soixante de Kirkman.

II. Désignons par R, S, T les points $(A\alpha_1, \beta\gamma)$, $(B\beta_1, \alpha\gamma)$, $(C\gamma_1, \alpha\beta)$, et par R_1, S_1, T_1 les points $(A\alpha, \beta_1\gamma_1)$, $(B\beta, \alpha_1\gamma_1)$, $(C\gamma, \alpha_1\beta_1)$.

Dans les hexagones

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha B A R H_1 I_1, \\ \beta C B S K\ H, \\ \gamma B C T H\ K, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 B A R_1 H\ I, \\ \beta_1 C B S_1 K_1 H_1, \\ \gamma_1 B C T_1 H_1 K_1, \end{array}\right.$$

les côtés non consécutifs sont concourants trois à trois, c'est-à-dire en α_1 et γ, β_1 et α, γ_1 et α dans le premier système, et en α et γ_1, β et α_1, γ et α_1 dans le second. Les diagonales principales doivent donc être concourantes, ce qui amène les six droites αR, βS, γT et $\alpha_1 R_1$, $\beta_1 S_1$, $\gamma_1 T_1$ au point O.

III. En appelant x et x_1, y et y_1, z et z_1 les rayons $A\alpha$ et $A\alpha_1$, $B\beta$ et $B\beta_1$, $C\gamma$ et $C\gamma_1$, formant la division $+1$ dans les angles de ABC, ou tangents à une conique, on aura le *sexlatère*

$$x z_1 y x_1 z y_1$$

dans lequel les diagonales principales

$$y z_1 - y_1 z : LL_1, \quad x_1 z - x z_1 : MM_1, \quad x y_1 - y x_1 : NN_1$$

sont concourantes en un point de Brianchon.

Or les axes du système

$$\left\{\begin{array}{l} B\beta\gamma C\gamma_1\beta_1, \\ A\alpha\gamma C\gamma_1\alpha_1, \\ A\alpha\beta B\beta_1\alpha_1, \end{array}\right.$$

savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} L\,L_1\,L_2, \\ M\,M_1\,M_2, \\ N\,N_1\,N_2, \end{cases}$$

sont précisément ces diagonales, et, par conséquent, concourants.

Comme d'ailleurs, dans les hexagones

$$\begin{cases} L\,S_1\,N_1\,A\,\beta_1\,N_2, \\ L_1\,T_1\,M\,A\,\gamma_1\,M_2, \end{cases}$$

les côtés non consécutifs sont concourants en α_1 et β, α_1 et γ, les diagonales doivent être aussi concourantes, ce qui amène deux des axes (2) au point O, et par suite le troisième, puisqu'ils passent par un même point.

Le point (1) *de Kirkman coïncide ainsi avec le point* (2) *de Brianchon, et douze droites passent par ce point.*

IV. En permutant successivement α et α_1, β et β_1, γ et γ_1, ce qui laisse subsister le triangle ABC, et procédant de même, on obtiendra trois nouveaux faisceaux contenant chacun douze droites concourantes en O_1, O_2, O_3, et chacun de ces points sera à la fois un Kirkman et un Brianchon.

V. Désignons par i et i_1, h et h_1, k et k_1 les droites (xy, x_1z_1) et (xz, x_1y_1), (xy, y_1z_1) et (yz, x_1y_1), (xz, y_1z_1) et (yz, x_1z_1).

Les sexlatères

$$\begin{cases} x\,y\,y_1\,x_1\,z_1\,z, \\ y\,x\,x_1\,y_1\,z_1\,z, \\ z\,x\,x_1\,z_1\,y_1\,y \end{cases}$$

donnent naissance aux trois points de Brianchon

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a\,i\,i_1,\\ b\,h\,h_1,\\ c\,k\,k_1. \end{array}\right.$$

Or les trois *trilatères*

$$\left\{\begin{array}{l} a\,h\;\,c,\\ i\;\,h\;\,k,\\ i_1\,h_1\,k_1 \end{array}\right.$$

admettent pour centres d'homologie les trois points de Brianchon relatifs au système

$$\left\{\begin{array}{l} x\,y\;\,z\,x_1\,y_1\,z_1,\\ x\,z_1\,z\,y\;\,y_1\,x_1,\\ x\,x_1\,z\,z_1\,y_1\,y, \end{array}\right.$$

lesquels sont situés sur une droite d, car les sexlatères ne diffèrent que par la permutation circulaire des côtés de rang pair. Ces trilatères ont donc un axe commun d'homologie, ou les points (3) sont situés sur l'une des soixante droites δ qui, dans le sexlatère de Brianchon, correspondent aux soixante points de Kirkman de l'hexagone de Pascal.

VI. Appelons r, s, t les droites (ax_1, yz), (by_1, xz), (cz_1, xy), et r_1, s_1, t_1 les droites $(ax, y_1 z_1)$, $(by, x_1 z_1)$, $(cz, x_1 y_1)$.

Dans les sexlatères

$$\left\{\begin{array}{l} x\,b\,a\,r\,h_1\,i_1,\\ y\,c\,b\,s\,k\;\,h,\\ z\,b\,c\,t\,h\;\,k, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\,b\,a\,r_1\,h\;\,i,\\ y_1\,c\,b\,s_1\,k_1\,h_1,\\ z_1\,b\,c\,t_1\,h_1\,k_1. \end{array}\right.$$

les sommets sont trois à trois en ligne droite, c'est-à-dire sur x_1 et z, y_1 et x, z_1 et x dans le premier système et sur x et z_1, y et x_1, z et x_1 dans le second. Les côtés opposés doivent donc se rencontrer en trois points en ligne droite, ce qui amène les six points xr, ys, zt et x_1r_1, y_1s_1, z_1t_1 sur δ.

VII. Dans l'hexagone de Pascal

$$\alpha\gamma_1\beta\alpha_1\gamma\beta_1,$$

les trois points

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\,\gamma_1,\ \beta_1\gamma\ :\ \lambda,\ \lambda_1,\\ \alpha_1\gamma_1,\ \alpha\ \gamma_1 : \mu,\ \mu_1,\\ \alpha\ \beta_1,\ \alpha_1\beta\ :\ \nu,\ \nu_1 \end{array}\right.$$

sont en ligne droite.

Or les centres des sexlatères

$$\left\{\begin{array}{l} b\,y\,z\,c\,z_1\,y_1,\\ a\,x\,z\,c\,z_1\,x_1,\\ a\,x\,y\,b\,y_1\,x_1, \end{array}\right.$$

savoir

(4)
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda\,\lambda_1\,\lambda_2,\\ \mu\,\mu_1\,\mu_2,\\ \nu\,\nu_1\,\nu_2, \end{array}\right.$$

sont précisément ces points, et, par conséquent, en ligne droite.

Comme d'ailleurs dans les sexlatères

$$\left\{\begin{array}{l} i\ s_1\,v_1\,a\,y_1\,v_2,\\ i_1\,t_1\,\mu\,a\,z_1\,\mu_2, \end{array}\right.$$

les sommets non consécutifs appartiennent aux droites x_1 et y, x_1 et z, les points de rencontre des côtés opposés doivent être aussi en ligne droite, ce qui amène deux des points (4) sur δ, et par suite le troisième, puisqu'ils sont alignés.

La droite (3) *ou* δ *coïncide ainsi avec la droite* (4) *de Pascal et douze points appartiennent à cette droite.*

VIII. En permutant successivement x et x_1, y et y_1, z et z_1, ce qui conserve le trilatère *abc*, et procédant de même, on obtiendra trois nouvelles droites δ_1, δ_2, δ_3, contenant chacune douze points et étant à la fois une des soixante droites δ et une pascale.