A.-E. PELLET

Sur les équations réciproques et les équations du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 13 (1894), p. 108-112

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__108_0>

SUR LES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES ET LES ÉQUATIONS DU QUATRIEME DEGRÉ;

PAR M. A.-E. PELLET.

1. Supposons que les racines d'une équation $f(x)=0$ de degré $2m$ se partagent en m groupes de deux racines inégales x_1, x_2, satisfaisant à la relation

$$ax_1x_2+b(x_1+x_2)+c=0.$$

On peut par une substitution linéaire ramener cette équation à être réciproque ou à ne contenir que des puissances paires de l'inconnue. Soit d'abord $a\neq 0$; posons $x=y+\beta$; les valeurs de y correspondant a x_1, x_2 satisfont à la relation

$$ay_1y_2+(b+a\beta)(y_1+y_2)+a\beta^2+2b\beta+c=0,$$

qui se réduit à

$$ay_1y_2+\frac{ac-b^2}{a}=0.$$

pour $\beta=-\frac{b}{a}$. L'équation en y devient réciproque si l'on remplace y par

$$\sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}\,z,$$

et paire si l'on remplace y par

$$\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma},$$

γ étant une quantité quelconque différente de 0; en effet, dans le premier cas on a la relation $z_1z_2=1$, et dans le second cas $z_1+z_2=0$.

Lorsque $a = 0$, l'équation $f(x) = 0$ devient paire en posant

$$x = y - \frac{c}{2b},$$

et réciproque en posant

$$x = \frac{y+1}{y-1} - \frac{c}{2b}.$$

2. Considérons une équation du quatrième degré, à coefficients réels

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

et soient x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines supposées inégales.

Les deux équations

$$ax_1x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$
$$ax_3x_4 + b(x_3 + x_4) + c = 0$$

déterminent les rapports des quantités a, b, c. a est nul si $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{p}{2}$; et alors la substitution $x = y - \frac{p}{4}$ transforme l'équation en une équation paire. Supposons $x_1 + x_2$ différent de $-\frac{p}{2}$. Si x_1, x_2 sont des quantités imaginaires conjuguées, x_3, x_4 sont des quantités réelles ou imaginaires conjuguées, par suite les rapports des quantités a, b, c sont réels. Effectuons la substitution $x = y - \frac{b}{a}$; y_1, y_2 sont des quantités imaginaires conjuguées; leur produit, qui est égal à $\frac{b^2 - ac}{a^2}$, est donc positif; les deux substitutions

$$y = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} z, \qquad y = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{z + \gamma}{z - \gamma}$$

qui ramènent l'équation donnée à une équation réciproque ou à une équation paire sont donc réelles. Si les racines x_1, x_2 sont réelles ainsi que x_3 et x_4, supposons-les rangées par ordre de grandeur,

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Après la substitution $x = y - \frac{b}{a}$, on a

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 = -\frac{b^2 - ac}{a^2};$$

il en résulte que $\frac{b^2 - ac}{a^2}$ est positif. En effet, si le produit $y_1 y_2$ était négatif, les quantités y_1, y_2 seraient de signes contraires, y_1 négatif et y_2 positif, car on a

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4;$$

y_3, y_4 seraient tous deux positifs, ainsi que leur produit; et l'on aurait une contradiction.

Ainsi l'on peut, dans tous les cas, ramener une équation du quatrième degré, à coefficients réels, à être paire ou réciproque par une substitution linéaire à coefficients réels.

3. D'après ce qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s}}$$

peut se ramener à la forme

$$\int \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{Ay^4 + By^2 + C}}$$

de trois manières différentes par une substitution linéaire $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$; f et F désignent des fonctions rationnelles. Soit $F(y) = F_1(y^2) + F_2(y^2)y$; l'intégrale précédente se décompose en deux autres, l'une d'elles $\int \frac{F_2(y^2)y\,dy}{\sqrt{Ay^4+By^2+C}}$ pouvant s'exprimer à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques, ce que l'on voit immédiatement en prenant y^2 pour variable; il peut se faire que l'autre $\int \frac{F_1(y^2)\,dy}{\sqrt{Ay^4+By^2+C}}$ puisse se ramener à la forme $\int \frac{F(z^2)z\,dz}{\sqrt{A_1 z^4+B_1 z^2+C_1}}$ par une substitution linéaire. Cette substitution, laissant sous forme paire l'équation Ay^4+By^2+C, est déterminée; on a

$$y=\sqrt{\alpha}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma},$$

α étant égal à $\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$, et γ une indéterminée différente de 0.

Ainsi soit $\int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$, intégrale effectuée par Euler, en posant $p=\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; en remplaçant x par $\frac{z+\gamma}{z-\gamma}$, elle devient

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2+\gamma^2)\sqrt{(z+\gamma)^4+(z-\gamma)^4}};$$

et en remplaçant x par $\sqrt{-1}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma}$,

$$\int \frac{(z^2+\gamma^2)\sqrt{-1}\,dz}{z\sqrt{(z+\gamma)^4+(z-\gamma)^4}}.$$

On voit de même que l'intégrale

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

où

$$f(x^2)=F\left(x^2+\frac{1}{k^2x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

F désignant une fonction rationnelle, se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle en posant

$$x = \sqrt{\frac{1}{\pm k}}\,\frac{z+\gamma}{z-\gamma},$$

puis

$$z^2 = t;$$

cette intégrale a été considérée par M. Hermite (Cours de la Sorbonne).

En général soit $\varphi(x) = 0$ une équation de degré $2m$, dont les racines peuvent se partager en m groupes de deux racines satisfaisant à une relation de la forme

$$a x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0;$$

l'intégrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

pourra se ramener par une transformation linéaire $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ à la forme

$$\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{\psi(y^2)}},$$

$\psi(y^2)$ étant une fonction entière et de degré m en y^2, $f_1(y)$ une fonction rationnelle de y en même temps que $f(x)$. Posons

$$y^2 = t, \qquad f_1(y) = \mathrm{F}(y^2) + \mathrm{F}_1(y^2)\,y;$$

il vient

$$\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{\psi(y^2)}} = \int \frac{\mathrm{F}_1(t)\,dt}{2\sqrt{\psi(t)}} + \int \frac{\mathrm{F}(t)\,dt}{2\sqrt{t\,\psi(t)}},$$

et l'intégrale proposée est ramenée à d'autres de même forme, la racine carrée portant sur un polynome de degré inférieur. En particulier, si $\varphi(x) = 0$ est une équation du sixième degré, $\psi(t)$ et $t\,\psi(t)$ sont des polynomes du troisième et du quatrième degré et l'on est ramené aux fonctions elliptiques.