Nouvelles annales de mathématiques

Émile Lemoine

Une règle d'analogies dans le triangle et la spécification de certaines analogies à une transformation dite « transformation continue »

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 20-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__20_1>

UNE RÈGLE D'ANALOGIES DANS LE TRIANGLE ET LA SPÉCIFICATION DE CERTAINES ANALOGIES A UNE TRANSFORMATION DITE « TRANSFORMATION CONTINUE »;

PAR M. ÉMILE LEMOINE.

On peut remarquer que beaucoup de propriétés du triangle vont par groupes de quatre; par exemple, à une propriété du cercle inscrit en correspond une autre de chaque cercle ex-inscrit, etc.; la recherche d'une loi qui relierait ces analogies m'a conduit à une transformation très féconde des formules, des théorèmes et des équations relatives au triangle, transformation dont je vais parler ici.

J'énoncerai d'abord un principe évident qui conduit très vite synthétiquement aux résultats que je veux exposer :

Toute formule entre les éléments du triangle peut être mise sous la forme $F(A, B, C) = 0$, A, B, C *étant les trois angles du triangle.*

En effet, tous les éléments du triangle peuvent s'exprimer en fonction des angles et d'un élément linéaire, lequel disparaît à cause de l'homogénéité.

L'identité $F(A, B, C) = 0$ aura évidemment lieu, quels que soient les angles A, B, C, pourvu que leur somme soit π; donc, si je remplace, dans $F(A, B, C) = o$,

$$A \text{ par } f_1(A, B, C), \quad B \text{ par } f_2(A, B, C), \quad C \text{ par } f_3(A, B, C),$$

f_1, f_2, f_3 remplissant la condition $f_1 + f_2 + f_3 = \pi$, j'aurai aussi

$$F(f_1, f_2, f_3) = o,$$

nouvelle forme de l'identité entre A, B, C, et cette forme *pourra* correspondre à une nouvelle forme de relations entre des éléments du triangle, éléments que l'on introduira, par exemple, soit dans f_1, f_2, f_3, soit dans

$$F(f_1, f_2, f_3) = o.$$

Ce sera une transformation de formule et l'on voit d'ailleurs qu'il y a une infinité de transformations possibles; il est, de plus, évident qu'une formule *générale* quelconque du triangle contient en réalité implicitement toutes les autres formules imaginables relatives au triangle, puisque l'une quelconque d'elles dit simplement : *Voici une propriété que l'on a toujours lorsque l'on a un triangle* et que l'on a aussi, en même temps, toutes les autres propriétés inhérentes à l'état de triangle.

La plus féconde, je crois, de ces transformations est celle que l'on réalise en remplaçant dans

$$F(A, B, C) = o,$$

$$A \text{ par } -A, \quad B \text{ par } \pi - B, \quad C \text{ par } \pi - C;$$

c'est même la seule que j'ai rencontrée qui présente un grand intérêt pratique; c'est d'elle dont je vais montrer l'utilité très générale dans la Géométrie du triangle [1]; nous appellerons ce genre de transforma-

[1] L'espace dont je puis disposer dans cet article m'oblige à renvoyer le lecteur pour plus de développements à divers Memoires parus sur la question. (LEMOINE, *Comptes rendus de l'Association*

tion : *transformation continue* et nous donnerons, en terminant, le motif de cette dénomination.

Nous désignons par a, b, c. p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, R, S, r, r_a, r_b, r_c les côtés, les quantités

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c),\quad \tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad \tfrac{1}{2}(c+a-b),\quad \tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

le rayon du cercle circonscrit, la surface, les rayons des cercles tangents aux trois côtés du triangle et nous y ajoutons δ, δ_a, δ_b, δ_c pour représenter $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$.

Enfin le signe (E) signifiera : ce que devient E *par transformation continue*.

Cela posé, si nous supposons que a est l'élément linéaire qui disparaît à cause de l'homogénéité pour donner

$$F(A, B, C) = 0,$$

élément que nous pouvons admettre invariable puisqu'il disparaît, les formules $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ donnent par *transformation continue en* A

$$\frac{a}{\sin(-A)} = \frac{(b)}{\sin(\pi - B)} = \frac{(c)}{\sin(\pi - C)} = (2R)$$

ce qui montre que b, c, R deviennent $-b$, $-c$, $-R$, par *transformation continue en* A.

p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ deviennent évidemment $(p-a)$, $-p$, $(p-c)$, $(p-b)$; la formule $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, montre que S devient : $-S$.

Les formules $S = pr = (p-a)r_a = \ldots$ montrent que r, r_a, r_b, r_c deviennent r_a, r, $-r_c$, $-r_b$, etc.

---

française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Marseille 1891. Mathesis, 1892, p. 98 et 81. Poulain, *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, 1892, p. 110, 133, 151. Lemoine, même recueil, 1892, p. 62, 91, etc.

Sans insister davantage, nous allons donner le Tableau *de la transformation continue en* A des principaux éléments du triangle et, si h_a, h_b, h_c et ω sont les hauteurs et l'angle de Brocard du triangle, nous pouvons dire :

Dans une formule on peut remplacer : a, b, c, p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, S, R, r, r_a, r_b, r_c, δ, δ_a, δ_b, δ_c, h_a, h_b, h_c, A, B, C, ω, etc., *par* a, $-b$, $-c$, $-(p-a)$, $-p$, $(p-c)$, $(p-b)$, $-$S, $-$R, r_a, r, $-r_c$, $-r_b$, $-\delta_a$, $-\delta$, $-\delta_c$, $-\delta_b$, $-h_a$, h_b, h_c, $-$A, $\pi-$B, $\pi-$C, $-\omega$, etc., *et l'on aura une formule exacte.*

Il y a évidemment aussi *les transformations continues en* B *et en* C.

Les théorèmes se transformeront d'une façon analogue ; par exemple, s'il s'agit d'avoir, par *la transformation continue en* A, la transformation d'un théorème où entrent le cercle circonscrit de rayon r_b, la longueur p, etc., nous les remplacerons respectivement par r_c et par $(p-a)$, etc., en changeant le signe des segments y relatifs portés sur des droites s'il y a lieu.

Les équations se transformeront également de la façon suivante :

Supposons que les coordonnées normales absolues d'un point M soient : $\varphi_1(a,b,c)$, $\varphi_2(a,b,c)$, $\varphi_3(a,b,c)$, on aura

$$a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 + c\,\varphi_3 = 2\text{S}: \tag{1}$$

appelons φ_{1a}, φ_{2a}, φ_{3a} ce que deviennent φ_1, φ_2, φ_3 par *transformation continue en* A et appliquons la transformation continue en A à l'égalité (1), elle deviendra

$$a\,\varphi_{1a} - b\,\varphi_{2a} - c\,\varphi_{3a} = -2\text{S}$$

et l'on voit qu'il y a un point M_a dont les coordonnées normales sont $-\varphi_{1a}$, φ_{2a}, φ_{3a}. M_a est le *transformé continu en* A de M [1].

On déduit de ce qui précède :

Si l'on a une équation en coordonnées *normales* $\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0$, sa *transformée continue en* A sera

$$\varphi(-x, y, z, a, -b, -c) = 0$$

et, si des calculs opérés sur diverses équations ont conduit à un certain théorème, les diverses équations de ce calcul *transformées en* A conduiront directement *à la transformation en* A de ce théorème. Il est clair qu'il n'est aucunement besoin de faire chaque fois cette vérification pour légitimer la transformation opérée immédiatement.

On verrait de même que : si, au lieu des coordonnées normales, on se sert des coordonnées normales barycentriques, un point M ayant pour coordonnées

$$\Psi_1(a, b, c), \quad \Psi_2(a, b, c), \quad \Psi_3(a, b, c)$$

donnera lieu à un *transformé continu en* A, M_a, dont les coordonnées seront

$$\Psi_1(a, -b, -c), \quad \Psi_2(a, -b, -c), \quad \Psi_3(a, -b, -c)$$

et l'équation

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c) = 0$$

transformée donnera

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma, a, -b, -c) = 0.$$

En coordonnées cartésiennes (CB axe des x, CA axe

---

[1] Un point M marqué simplement sur le plan n'a pas de *transformé continu*, cela n'a aucun sens, il faut que l'on donne ses coordonnées en fonction des éléments du triangle, il n'y a donc pas de construction générale pour déduire M_a de M ; la construction dépend exclusivement des fonctions de a, b, c qui définissent M.

des y), un point M : X, Y a pour *transformé continu en* A, M_a : X_a, $-Y_a$, en désignant par X_a, Y_a ce que deviennent les fonctions X, Y en y faisant la *transformation continue en* A.

Une équation $F(X, Y, a, b, c) = 0$ devient

$$F(X, -Y, a, -b, -c) = 0.$$

Voici les principales propriétés, faciles à démontrer, de la *transformation continue en* A; quelques-unes rentrent l'une dans l'autre.

1. La droite de l'infini a pour transformée la droite de l'infini.
2. Les ombilics du plan se transforment l'un dans l'autre.
3. Le degré d'une courbe se conserve ainsi que sa classe.
4. Un cercle et une parabole ont pour transformés un cercle et une parabole.
5. Les transformées des tangentes à une courbe sont les tangentes à la courbe transformée au point transformé du point de contact; d'où : les droites qui enveloppent une courbe se transforment en droites qui enveloppent la transformée de la courbe.
6. Si n droites concourent en V, leurs transformées concourent en V_a transformé de V.
7. Si n points sont sur une droite L, les transformés de ces points sont sur L_a transformée de L.
8. Si les longueurs de deux droites ou les valeurs des tangentes de deux angles sont dans un rapport indépendant des éléments du triangle de référence, ce rapport se conservera dans la transformation.
9. Les divisions harmoniques, l'homographie, l'homologie, l'involution, l'orthologie se conservent.
10. Des droites parallèles se transforment en des droites parallèles.
11. Deux droites perpendiculaires se transforment en deux droites perpendiculaires.
12. Les foyers ou les sommets d'une courbe se transforment en foyers ou en sommets de la transformée.
13. Les valeurs des rapports anharmoniques des divisions

transformées se déduisent par transformation continue des rapports anharmoniques des divisions données.

14. La polaire d'un point par rapport à une conique se transforme en la polaire du point transformé par rapport à la conique transformée.

15. La distance de deux points transformés, la distance d'un point transformé à une droite transformée se déduisent par transformation continue de la distance des deux points donnés ou de la distance du point donné à la droite donnée, etc.

Ce qui précède suppose que les éléments de la relation que l'on traite algébriquement, par transformation continue, sont déterminés sans ambiguïté possible, c'est-à-dire, par exemple, qu'ils ne contiennent point de radicaux, car ces radicaux ont implicitement un double signe; s'il y en a, il faut discuter le cas particulier qui se présente.

Ainsi l'on a

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

qui semble, à première vue, donner par *transformation continue en* A

$$\sin\left(-\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{-b\times -c}} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}};$$

mais, le radical comportant implicitement le double signe, la *transformation continue en* A correspond ici au signe $-$ et l'on a effectivement

$$\sin\left(-\frac{A}{2}\right) = -\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}},$$

ce qui est exact, mais reproduit simplement la formule (voir *loc. cit.*, POULAIN).

Eu égard *à la transformation continue*, les points remarquables, droites, courbes, formules, théorèmes relatifs au triangle se divisent en quatre catégories :

1° *La transformation continue* faite en A, en B ou en C les reproduit sans modification.

Exemples : Le point de Lemoine, la formule

$$a = b \cos C + c \cos B, \qquad \ldots$$

2° *La transformation continue* faite en A, en B ou en C donne des résultats différents entre eux et différents du premier.

Exemples : Les théorèmes relatifs au cercle inscrit donnent des théorèmes relatifs aux cercles ex-inscrits. La formule

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(b-c)^2 = p^2 - 3r\delta$$

transformée en A donne

$$\tfrac{1}{2}[(b-c)^2+(c+a)^2+(b+a)^2] = (p-a)^2 + 3r_a\delta_a,$$

transformée en B donne

$$\tfrac{1}{2}[(b+c)^2+(c-a)^2+(a+b)^2] = (p-b)^2 + 3r_b\delta_b,$$

transformée en C donne

$$\tfrac{1}{2}[(b+c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2] = (p-c)^2 + 3r_c\delta_c.$$

3° *La transformation continue* faite soit en A, soit en B, soit en C, reproduit une fois sans modification la formule ou le théorème; les deux autres donnent toutes deux un même résultat différent de la formule ou du théorème primitif.

Exemple : La formule

$$(b-c)\,r_b r_c = S(r_b - r_c)$$

se reproduit en A; mais, soit en B, soit en C, elle donne

$$(b+c)\,r r_a = S(r - r_a).$$

4° *La transformation continue* faite soit en A, soit en B, soit en C donne un même résultat, mais différent de la formule ou du théorème que l'on transforme.

Exemple : L'équation

$$\Sigma\sqrt{x\sin(A+60)}=0,$$

transformée soit en A, soit en B, soit en C donne

$$\Sigma\sqrt{x\sin(A-60)}=0.$$

Ces deux équations représentent les coniques de Simmons.

Je n'ai pas trouvé de cas où *la transformation continue* donne des combinaisons autres de résultats, comme serait celle-ci, par exemple :

La formule donnée se reproduit par une des transformations et, par les deux autres, donne des résultats différents et différents entre eux.

La transformation continue conduit le plus souvent, et cela sans aucune recherche, à des théorèmes ou à des formules *analogues* à celles qui sont le but direct de la recherche que l'on fait; elle ne donne pas, d'ailleurs, toutes les analogies possibles, car il y en a qui peuvent dériver d'autres sources. Ainsi voici deux formules qui ont une analogie bien évidente

$$ar_a+br_b+cr_c=2p(2R-r),$$
$$-ar_a+br_b+cr_c=2p(2R-r_a),$$

et qui ne peuvent dériver l'une de l'autre par transformation continue; elles conduisent d'ailleurs chacune à trois formules par transformation continue en A, en B et en C; elles donnent en A

$$ar-br_c+cr_b=2(p-a)(2R+r_a),$$
$$-ar+br_c+cr_b=2(p-a)(2R+r),$$

en B, etc.

Quand un géomètre vient de trouver un théorème, il a un avantage évident à appliquer toujours *la transformation continue,* car il arrive fréquemment qu'il obtient ainsi de nouveaux théorèmes ou de nouvelles formules.

Nous allons prendre quelques exemples, choisis au hasard dans les publications récentes des journaux de Mathématiques qui s'occupent du triangle.

M. Furhmann a donné dans le journal *Mathesis,* 1890, p. 105, un très intéressant travail *Sur un cercle associé à un triangle,* où il énonce de nombreuses propriétés fort curieuses de ce nouveau cercle. *La transformation continue* montre immédiatement qu'il y a trois autres cercles qui jouissent de propriétés analogues et auxquels le Mémoire en entier peut être appliqué avec les modifications indiquées par *la transformation continue.*

Dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, M. Boutin donne un grand nombre de formules relatives au triangle; en y appliquant *la transformation continue,* on écrit immédiatement des formules que leur défaut de symétrie apparente rend quelquefois assez difficiles à démontrer autrement et rendrait surtout difficiles à prévoir. Voici sept de ces formules :

$$(1)\qquad a\cot\frac{A}{2}+b\cot\frac{B}{2}+c\cot\frac{C}{2}=2\delta,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$a\cot\frac{A}{2}-b\,\text{tang}\frac{B}{2}+c\,\text{tang}\frac{C}{2}=2\delta_a,$$

$$(2)\qquad r_a\,\text{tang}\frac{A}{2}+r_b\,\text{tang}\frac{B}{2}+r_c\,\text{tang}\frac{C}{2}=\frac{\delta^2-2p^2}{p},$$

et, *par transformation continue en* A,

$$r\,\mathrm{tang}\frac{A}{2} + r_c\cot\frac{B}{2} + r_b\cot\frac{C}{2} = \frac{\delta_a^2 - 2(p-a)^2}{p-a},$$

(3) $$\sum \frac{ab\cos^2\frac{A}{2} - ac\cos^2\frac{B}{2}}{r_a} = 0,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\frac{ac\sin^2\frac{B}{2} - ab\sin^2\frac{C}{2}}{r} - \frac{ab\sin^2\frac{C}{2} - bc\cos^2\frac{A}{2}}{r_c} - \frac{bc\cos^2\frac{A}{2} + ac\sin^2\frac{B}{2}}{r_b} = 0,$$

(4) $$\left\{\begin{array}{l} 1 - \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) - \sin\left(C + \frac{B}{2}\right) + \sin\left(A + \frac{C}{2}\right) \\ \quad = 4\cos\left(\frac{C-B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right)\cos\left(\frac{A-C}{4}\right) \end{array}\right.$$

et, *par transformation continue en* A,

$$1 + \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) - \cos\left(C - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(A - \frac{C}{2}\right)$$
$$= 4\cos\frac{B-C}{4}\cos\left(45^\circ + \frac{A-B}{4}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{A-C}{4}\right).$$

(5) $$2\cot\omega = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} - \left(\mathrm{tang}\frac{A}{2} + \mathrm{tang}\frac{B}{2} + \mathrm{tang}\frac{C}{2}\right)$$

et, *par transformation continue en* A,

$$2\cot\omega = \cot\frac{A}{2}\,\mathrm{tang}\frac{B}{2}\,\mathrm{tang}\frac{C}{2} - \mathrm{tang}\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2},$$

(6) $$\frac{\left(1 - \cot\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1 - \cot\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1 - \cot\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1 - \cot\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1 - \cot\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1 - \cot\frac{C}{2}\cot C\right)} = 1,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\frac{\left(1+\cot\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1+\cot\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot B\right)}=1,$$

$$(7)\quad \frac{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1+\tang\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1+\tang\frac{C}{2}\cot B\right)}=1,$$

et, *par transformation continue en* A,

$$\frac{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot B\right)\left(1-\cot\frac{B}{2}\cot C\right)\left(1-\cot\frac{C}{2}\cot A\right)}{\left(1+\tang\frac{A}{2}\cot C\right)\left(1-\cot\frac{B}{2}\cot A\right)\left(1-\cot\frac{C}{2}\cot B\right)}=1.$$

Donnons comme exemple quelques applications de *la transformation continue.*

La parabole inscrite dans un triangle et qui touche la droite

$$\sum\frac{a}{b-c}x=0$$

[c'est la tangente commune au cercle et à l'ellipse inscrite de Steiner (voir *Nouvelles Annales,* 1886, p. 126)] a pour équation

$$\Sigma\sqrt{ax(2a-b-c)}=0;$$

son foyer, situé sur le cercle circonscrit, a pour coordonnées

$$\frac{a}{2a-b-c},\quad \ldots.$$

On en conclut immédiatement *par transformation continue en* A que :

La parabole inscrite dans un triangle et qui touche la droite

$$\frac{ax}{b-c}+\frac{by}{c+a}-\frac{cz}{a+b}=0$$

(laquelle est la tangente commune au cercle ex-inscrit o_a et à l'ellipse de Steiner) a pour équation

$$\sqrt{-ax(2a-b+c)}+\sqrt{by(2b+a-c)}+\sqrt{cz(2c+a-b)}=0$$

et pour foyer le point dont les coordonnées sont

$$-\frac{a}{2a-b+c},\quad \frac{b}{2b+a-c},\quad \frac{c}{2c+a-b}.$$

Le cas où un côté égale la moitié de la somme des deux autres est intéressant à examiner. Nous ne nous y arrêterons point parce que cette discussion très simple ne se rattache pas directement à l'objet de notre Note.

Appliquons la transformation continue à l'étude de la proposition suivante énoncée par M. Boutin (*Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, 1891, p. 184) :

Soient O, o, o_a, o_b, o_c, A', B', C' *les centres du cercle* ABC, *des cercles tangents aux trois côtés et les pieds des hauteurs; les droites* $A'o_a$, $B'o_b$, $C'o_c$ *concourant au point* M *dont les coordonnées sont*

$$\cos B+\cos C-\cos A,\quad \ldots.$$

Remarquons d'abord qu'à l'aide des formules que nous avons données à l'Association française, dans le journal *Mathesis*, etc., les coordonnées de M peuvent s'écrire plus simplement

$$R-r_a,\quad R-r_b,\quad R-r_c,$$

car on a

$$\cos A=\frac{2R-r-r_a}{2R},\quad \ldots,$$

et donnons quelques propriétés du point M.

Oo contient, comme l'on sait, le point J : $\frac{1}{p-a}, \ldots,$ si souvent rencontré dans la Géométrie du triangle. Il est facile d'établir que l'on a

$$\frac{\text{MO}}{\text{M}o} = \frac{\text{R}+r}{2r}, \qquad \frac{\text{JO}}{\text{J}o} = \frac{2\text{R}+r}{2r},$$

et si l'on appelle d la distance $\text{O}o$, d_a la distance $\text{O}o_a$ qui sont données par les formules

$$d^2 = \text{R}(\text{R}-2r), \qquad d_a^2 = \text{R}(\text{R}-2r_a),$$

on verrait aussi que

$$\text{M}o = \frac{2rd}{\text{R}-r}, \qquad \text{J}o = \frac{2rd}{2\text{R}-r}, \qquad \text{JM} = \frac{2\text{R}rd}{(\text{R}-r)(2\text{R}-r)}.$$

En appliquant *la transformation continue en* A, on a immédiatement les résultats suivants :

Les trois droites $o\text{A}'$, $o_c\text{B}'$, $o_b\text{C}'$ *concourent en un même point* M_a *dont les coordonnées sont*

$$\text{R}+r, \quad -\text{R}+r_c, \quad \text{R}+r_b.$$

M_a est sur $\text{O}o_a$, droite qui contient le point J_a :

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p-c}, \quad \frac{1}{p-b};$$

on a

$$\frac{\text{M}_a\text{O}}{\text{M}_a o_a} = \frac{-\text{R}+r_a}{2r_a}, \qquad \frac{\text{J}_a\text{O}}{\text{J}_a o_a} = \frac{-2\text{R}+r_a}{2r_a},$$

$$\text{M}_a o_a = \frac{2r_a d_a}{\text{R}-r_a}, \quad \text{J}_a o_a = \frac{2r_a d_a}{2\text{R}-r_a}, \quad \text{J}_a\text{M}_a = \frac{2\text{R}r_a d_a}{(\text{R}+r_a)(2\text{R}+r_a)}.$$

Nous avons fait, dans les divers Mémoires déjà cités, un très grand nombre d'applications de la méthode à des questions variées et à plus de trois cents formules, nouvelles pour la plupart; nous ne nous arrêterons donc pas davantage sur le sujet.

Nous citerons encore seulement trois exemples de formules, non des plus remarquables, que nous pourrions choisir dans ce que nous avons publié, mais que nous n'avons pas encore mentionnées,

$$\sum \frac{(b^2-c^2)^2}{a} = \frac{2p(\mathrm{R}-2r)}{\mathrm{R}}[p^2+r(2\mathrm{R}+r)],$$

$$p(2a-p) = r_a r_b + r_a r_c - r_b r_c,$$

$$a^2 r_a + b^2 r_b - c^2 r_c = 4\mathrm{R}p[(p-c) - c\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}],$$

qui donnent respectivement par *transformation continue en* A

$$-\frac{(b^2-c^2)^2}{a} + \frac{(c^2-a^2)^2}{b} + \frac{(a^2-b^2)^2}{c}$$
$$= \frac{2(p-a)(\mathrm{R}+2r_a)}{\mathrm{R}}[(p-a)^2 - r_a(2\mathrm{R}-r_a)],$$

$$p^2 - a^2 = rr_b + rr_c + r_b r_c,$$

$$a^2 r - b^2 r_c + c^2 r_b = 4\mathrm{R}(p-a)[(p-b) - c\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}].$$

La transformation continue ne s'applique qu'au triangle général ; ainsi les formules du triangle rectangle ne peuvent être transformées, au moins sans certaines précautions (*voir* l'article de M. Poulain déjà cité). Par exemple, dans le triangle BAC rectangle en A, on a

$$c = b \operatorname{tang} \mathrm{C};$$

la transformation continue, telle que nous l'avons définie, donnerait

$$c = -b \operatorname{tang} \mathrm{C},$$

ce qui est faux.

La transformation continue s'applique au tétraèdre ; nous n'indiquerons que la *transformation fondamentale* dont tout dérive et qui correspond au changement de a, b, c en a, $-b$, $-c$ dans le triangle.

Soit ABCD un tétraèdre ; désignons les arêtes opposées DA, BC par a' et a ; DB et AC par b' et b ; CD et AB par c' et c ; on peut dire que :

Si, dans une formule quelconque représentant une propriété générale du tétraèdre, on laisse a, b, c *et* *que l'on change a', b', c' en $-a'$, $-b'$, $-c'$, la nouvelle formule est encore exacte.*

La transformation continue appliquée au tétraèdre est aussi générale, mais, *en fait,* jusqu'ici moins féconde qu'appliquée au triangle. Cela tient surtout à ce qu'il y a, dans le tétraèdre, peu de points remarquables ayant des propriétés simples et aussi que la Géométrie de détail du tétraèdre est actuellement aussi peu avancée que l'était celle du triangle il y a quelques années; la question est, du reste, beaucoup plus compliquée.

Nous allons terminer ce petit travail en justifiant l'appellation de *transformation continue* que nous avons adoptée.

Si l'on considère un triangle ABC, il est clair que, par définition, toute propriété *générale* du triangle s'applique à ABC; imaginons que CA soit mobile autour de C et faisons tourner CA autour de C dans un même sens qui l'éloigne de CB, la figure aura deux états : 1° A est au-dessus de BC; 2° A est au-dessous; elle ne peut passer de l'un à l'autre de ces états par le mouvement continu de CA, qu'après que CA est devenue parallèle à BA; or une propriété générale du premier état de la figure appartient évidemment au second état, mais il est facile de voir qu'elle s'énoncera *souvent* différemment en employant la terminologie habituelle rapportée au triangle ABC; ainsi, suivons par continuité ce que devient le cercle inscrit à ABC pris dans le premier état de la figure, on voit qu'il deviendra, dans le deuxième état, le cercle ex-inscrit o_a du triangle ABC; par conséquent, un théorème dans l'énoncé duquel entreront le cercle inscrit, son centre, son rayon, etc., donnera par continuité un énoncé d'une *forme* nouvelle où entreront le cercle ex-inscrit o_a, son centre, son rayon, etc. Le changement est produit *par la transformation continue en* A.

Pour le tétraèdre ABCD on réalisera géométriquement la *transformation continue en* D en faisant tourner une des faces aboutissant en D, BCD par exemple, autour de sa base BC et l'on aura deux états de la figure : 1° D est au-dessus du plan ABC; 2° D est au-dessous; ces deux états étant séparés par la position où le plan BCD est parallèle à AD.