

AUDIBERT

**Solution de la question de mathématiques
spéciales proposée au concours
d'agrégation de 1891**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 436-440

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__436_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1891;**

PAR M. AUDIBERT.

Prenons pour axes des y et des x les deux côtés CA et CB du triangle donné.

Les coniques S et S' sont respectivement circonscrites aux quadrilatères PQMN et PQM'N' dont les côtés sont représentés par les équations

$$\begin{array}{ll} \text{PQ,} & y - cx + d = 0, \\ \text{CP,} & y - px = 0, \\ \text{CQ,} & y - qx = 0, \\ \text{MN.} & mx + ny + r = 0, \\ \text{M'N'.} & m'x - n'y + r' = 0. \end{array}$$

Les équations des coniques sont alors

$$\begin{aligned} (S) \quad & \begin{cases} (y+px)(y+qx) \\ -(y+cx+d)(mx+ny+\varepsilon) = 0, \end{cases} \\ (S') \quad & \begin{cases} (y+px)(y+yx) \\ +(y+cx+d)(m'x+n'y+\varepsilon') = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$CA = b, \quad CB = a,$$

les conditions de tangence de ces coniques à l'un des côtés du triangle, au point A pour S, au point B pour S', se traduiront par les formules

$$\begin{aligned} n &= -b \frac{b+2d}{(b+d)^2}, & r &= \frac{b^2d}{(b+d)^2}, \\ m' &= -apq \frac{ac+2d}{(ac+d)^2}, & r' &= \frac{a^2dpq}{(ac+d)^2}, \end{aligned}$$

m et n' restent arbitraires.

1° Les droites MN et M'N' passent chacune par un point fixe, puisque l'une et l'autre coupent les axes en des points A₁ et B₁ tels que

$$\begin{aligned} CA_1 &= -\frac{r}{n} = \frac{bd}{b+2d} = b_1, \\ CB_1 &= -\frac{r'}{m'} = \frac{ad}{ac+2d} = a_1, \end{aligned}$$

valeurs indépendantes des paramètres m et n' demeurés arbitraires.

2° Si l'on substitue le triangle CA₁B₁ au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A₂ et B₂, et l'on aurait de même

$$CA_2 = \frac{b_1d}{b_1+2d} = b_2, \quad CB_2 = \frac{a_1d}{a_1c+2d} = a_2,$$

et ainsi de suite.

Ces relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_1} &= \frac{2}{b} + \frac{1}{d}, & \frac{1}{a_1} &= \frac{2}{a} + \frac{c}{d}, \\ \frac{1}{b_2} &= \frac{2}{b_1} + \frac{1}{d}, & \frac{1}{a_2} &= \frac{2}{a_1} + \frac{c}{d}, \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{b_n} &= \frac{2}{b_{n-1}} + \frac{1}{d}, & \frac{1}{a_n} &= \frac{2}{a_{n-1}} + \frac{c}{d}.\end{aligned}$$

On en tire

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2^n}{b} + \frac{1}{d} (2^n - 1), \quad \frac{1}{a_n} = \frac{2^n}{a} + \frac{c}{d} (2^n - 1).$$

Mais a_n et b_n étant les coordonnées à l'origine de la droite $A_n B_n$,

$$\frac{y}{b_n} + \frac{x}{a_n} = 1,$$

l'équation de cette ligne deviendra pour n infini

$$\frac{b+d}{b} y + \frac{ac+d}{a} x = 0.$$

3° Soient $y = \alpha x$, $y = \alpha' x$ les deuxièmes tangentes menées de l'origine aux coniques S et S' . La condition pour que ces tangentes forment avec CP et CQ un faisceau harmonique est

$$(1) \quad \frac{q + \alpha}{p + \alpha} = - \frac{q + \alpha'}{p + \alpha'}.$$

D'autre part, on trouve pour les coefficients angulaires des deux tangentes

$$\begin{aligned}\alpha &= - \frac{(cr - dm)^2 - 4r dpq}{4r d(p + q) - \frac{4bd}{b-d}(cr - dm)}, \\ \alpha' &= - \frac{4r' d(p + q) - \frac{4a dr \alpha}{ac + d}(r' - dn')}{(r' - dn')^2 - 4dr'}.\end{aligned}$$

Posant

$$cr - dm = m_1, \quad r' - dn' = n_1, \\ \frac{-2bd}{b+d} = k, \quad \frac{-2ad}{ac+d} = k', \quad \sqrt{\frac{-q}{p}} = fl.$$

et introduisant les valeurs de α et de α' dans la formule (1), elle devient, après avoir extrait la racine carrée des deux membres,

$$(2) \quad \frac{m_1 + kq}{m_1 + kp} = \pm fl \frac{n_1 + k'p}{n_1 + k'q},$$

qu'on peut écrire encore

$$\frac{k(q-p)}{m_1 + kp} + 1 = \pm fl \left[\frac{k'(p-q)}{n_1 + k'q} + 1 \right].$$

Il faut pour la réalité de fl que p et q soient de signes contraires.

Les valeurs de m_1 et de n_1 se déduisent de celles de m et n' tirées des équations

$$\xi \frac{dS}{dx} + \eta \frac{dS}{dy} + \frac{dS}{dz} = 0, \quad \xi \frac{dS'}{dx} + \eta \frac{dS'}{dy} + \frac{dS'}{dz} = 0,$$

dans lesquelles x et y sont les coordonnées du point de rencontre des deux polaires du point $H(\xi, \eta)$.

Ces équations étant du premier degré en x, y, m et n' donneront pour ces deux derniers paramètres des valeurs de la forme

$$\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}.$$

Celles qu'on en déduira pour m_1 et n_1 seront aussi de même forme, et, en les introduisant dans la formule (2), on aura finalement pour le lieu cherché une équation du second degré, c'est-à-dire une conique.

4^o Les points communs aux coniques S et S' satisfé-

ront à l'équation

$$S - S' = 0$$

ou

$$(y + cx + d)[(m - m')x + (n - n')y + r - r'] = 0.$$

Or, $y + cx + d = 0$ étant l'équation de la droite PQ,

$$(3) \quad (m - m')x + (n - n')y + r - r' = 0$$

représente la seconde sécante commune.

Quand cette droite sera tangente à S ou à S', les deux coniques se toucheront.

On aura alors

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{m - m'} = \frac{\frac{dS}{dy}}{n - n'} = \frac{\frac{dS}{dz}}{r - r'},$$

et la même relation en S', soit quatre équations dont deux sont surabondantes.

A l'aide de $S = 0$, $S' = 0$ on fera disparaître m et n' des numérateurs, et l'on tirera les valeurs des rapports $\frac{m - m'}{r - r'}$, $\frac{n - n'}{r - r'}$ qu'on portera dans (3). Le résultat sera l'équation du quatrième degré

$$\begin{aligned} & (y + cx + d)^3(rr' + rm'x + r'n'y) + (y + cx + d)^2 \\ & \times [(p + q)(r + r')xy + rrpqx^2 + 2r'y^2) \\ & - (y + cn + d)(y + pn)(y + pn) \\ & \times [(cr + dm')x + (r' + dn)y + d(r + r')] \\ & - d(y + px)(y + qx)^2 = 0. \end{aligned}$$
