

BARISIEN

Concours pour les bourses de licence (Paris, 1889)

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 297-301

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__297_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1889).

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

1^o Construire la courbe définie par l'équation

$$(1) \quad y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2},$$

2^o Si l'on coupe cette courbe par une parallèle à l'axe des x et si l'on désigne par a l'abscisse de l'un des points d'intersection, les abscisses des cinq autres points d'intersection seront

$$\frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad 1-\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Distinguer sur la figure les points qui correspondent aux formules précédentes, en supposant que a soit la plus grande des abscisses des points d'intersection.

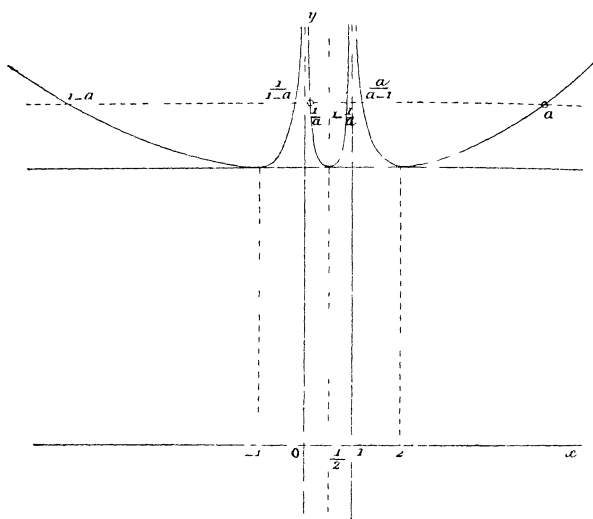
3^o La résolution de l'équation (1), où l'on regarde y comme un nombre donné et x comme l'inconnue, peut, de diverses manières, être ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré et d'une équation du second degré.

4^o Lieu de la projection du point d'intersection des tangentes à la courbe (1), en des points dont les abscisses sont inverses l'une de l'autre, sur la droite qui joint ces deux points.

I. La courbe représentée par l'équation (1) est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$. Elle a pour asymptotes les droites $x = 0$ et $x = 1$ et deux branches paraboliques : elle est située tout entière au-dessus de

la droite $y = \frac{27}{4}$ et a trois points de contact avec cette droite (*fig. 1*).

Fig. 1.



II. On remarque que la valeur y de (1) ne change pas lorsqu'on change x en $\frac{1}{x}$ ou en $1-x$, ou en $1-\frac{1}{x}$ et aussi en leurs inverses $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$; ce qui indique bien que, si l'une des abscisses d'intersection par une parallèle à l'axe des x est a , les autres sont

$$\frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad 1-\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Si a est la plus grande abscisse de ces points d'intersection, c'est forcément la valeur positive la plus grande. Donc $\frac{1}{a}$ est la plus petite valeur positive, $\left(1-\frac{1}{a}\right)$ est la deuxième valeur positive, $\frac{a}{a-1}$ la troisième. La plus

grande valeur négative est $(1 - a)$ et la plus petite est $\frac{1}{1-a}$.

III. Ces abscisses d'intersection, étant deux à deux inverses l'une de l'autre, montrent que l'équation (1), du sixième degré en x , doit être réciproque.

En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad yx^2(x^2 + 1 - 2x) = [(x^2 + 1) - x]^3,$$

et si l'on pose

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

d'où

$$(3) \quad x^2 + 1 = zx,$$

en portant cette valeur de $(x^2 + 1)$ dans (2), on en déduit

$$(4) \quad (z - 1)^3 - y(z - z) = 0.$$

On est donc ramené à la résolution de l'équation du troisième degré (4) et à celle du deuxième degré (3).

Un autre moyen d'arriver à ce résultat consiste à poser

$$(5) \quad x(x - 1) = t;$$

(1) devient alors

$$(6) \quad (t + 1)^3 - yt^2 = 0.$$

et l'on a à résoudre (6), puis (5).

On peut aussi poser

$$(7) \quad x(x - 1) = \frac{1}{u}.$$

Il faut alors résoudre l'équation du troisième degré

$$(u - 1)^3 - uy = 0.$$

IV. D'après ce que nous avons vu précédemment, la droite joignant deux points tels que les abscisses soient réciproques ne peut être qu'une parallèle à l'axe des x .

Il suffit donc de chercher les tangentes relatives aux points ayant pour abscisses a et $\frac{1}{a}$.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (1) est

$$\frac{(2x-1)(x^2-x+1)^2(x-2)(x+1)}{x^3(x-1)^3}.$$

L'équation de la tangente au point dont les coordonnées sont

$$x = a, \quad y = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

est donc

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} Y &= \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2} \\ &- \frac{(a^2 - a + 1)^2(2a-1)(a-2)(a+1)}{a^3(a-1)^3} (X - a). \end{aligned} \right.$$

Celle de la tangente au point ayant pour abscisse $\frac{1}{a}$ est

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} Y &= \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2} \\ &- \frac{(a^2 - a + 1)^2(2a-1)(a-2)(a+1)}{a^3(a-1)^3} \left(X - \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \right.$$

En retranchant (8) et (9), on obtient

$$(10) \quad X = \frac{2a}{a^2 + 1}.$$

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer a entre (10) et

$$(11) \quad Y = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

(301)

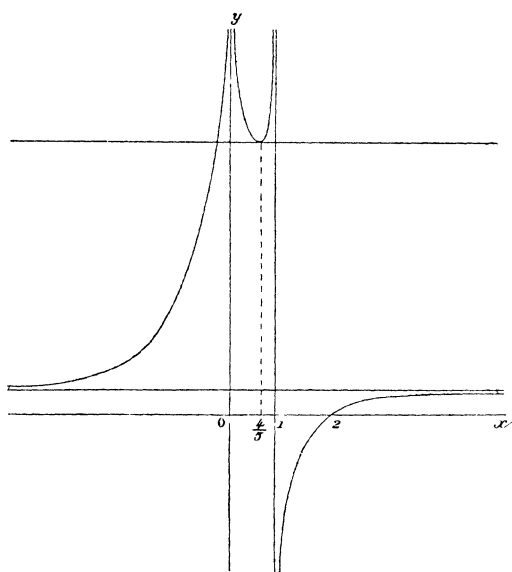
De (10), on tire

$$\alpha^2 + 1 = \frac{\lambda \alpha}{X}.$$

En portant dans (11), il vient pour l'équation du lieu

$$Y = \frac{(X-2)^3}{2X^2(X-1)}.$$

Fig. 2.



C'est une courbe du quatrième degré ayant pour asymptotes les trois droites

$$X = 0, \quad X = 1, \quad Y = \frac{1}{2}.$$

Elle est dessinée sur la *fig. 2*.