NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RAVIER

Solution de la question proposée au concours général de 1890

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 614-619

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__614_0>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1890;

PAR M. S. RAVIER (1),
Élève du lycée Condorcet.

I. — SOLUTION ANALYTIQUE.

1° Le problème n'a pas de sens si le point A est dans le plan P. Nous pouvons donc prendre pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant pour sommet le point A et pour face opposée le plan P.

Soit alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz\\ &\qquad+2B'zx+2B''xy+2Cxt+2C'yt+2C''zt=0\end{aligned}\right.$$

l'équation de la surface, et soient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &t=0,\\ &ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=0\end{aligned}\right.$$

les équations ponctuelles de la conique.

Son équation tangentielle à l'intérieur du plan P sera

$$(3)\quad \alpha u^2+\alpha' v^2+\alpha'' w^2+2\beta vw+2\beta' wu+2\beta'' uv=0,$$

$\alpha, \alpha', \alpha''$ et β, β', β'' étant égaux à [si l'on désigne par Δ le discriminant de l'équation (2)]

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a},\quad \frac{\partial\Delta}{\partial a'},\quad \frac{\partial\Delta}{\partial a''}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial b},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial b'},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial\Delta}{\partial b''}.$$

(1) Cet élève a obtenu le prix d'honneur.

Cela étant, soit

$$(4) \qquad ux + vy + wz = t$$

l'équation du plan des points a_1, a_2, a_3.

L'équation du cône, ayant pour sommet A et pour base l'intersection de ce plan avec la quadrique, s'obtient en éliminant t entre les équations (1) et (4), ce qui donne

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & \qquad + (ux + vy + wz)(2Cx + 2C'y + 2C''z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Son intersection avec le plan P aura précisément la même équation.

Cette intersection est une conique telle qu'il existe un triangle conjugué par rapport à la conique C qui lui soit inscrit.

On sait que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'il en soit ainsi, est que le second coefficient de l'équation en λ des coniques représentées par les équations (2) et (5) soit nul [1].

Écrivons cette condition; elle est

$$\begin{aligned} & \alpha(A + 2Cu) + \alpha'(A' + 2C'v) + \alpha''(A'' + 2C''w) \\ & \qquad + 2\beta(B + C''v + C'w) + 2\beta'(B' + Cw + C'u) \\ & \qquad\qquad + 2\beta''(B'' + C'u + Cv) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation en u, v, w est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan a_1, a_2, a_3.

Comme elle est du premier degré, le plan a_1, a_2, a_3 passe par un point fixe.

Les coordonnées de ce point sont les coefficients de u, v, w, et le terme connu de son équation tangentielle, ce dernier changé de signe, puisqu'on a pris pour le

---

[1] *Voir* SALMON, *Sections coniques*.

plan la forme d'équation

$$ux + vy + wz = t.$$

Ce sont

$$\begin{aligned}
x &= 2(\alpha C + \beta' C'' + \beta'' C'),\\
y &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
t &= -(\alpha A + \alpha' A' + \alpha'' A'' + 2\beta B + 2\beta' B' + 2\beta'' B'').
\end{aligned}$$

Il est à remarquer que t est nul et que le point M est dans le plan P, précisément quand

$$\alpha A + \alpha' A' + \ldots = 0;$$

c'est-à-dire quand il existe un triangle conjugué par rapport à la conique C, qui soit inscrit dans la section de la surface S par le plan P.

Cela peut servir de *vérification*.

Remarque. — Le plan polaire de M, par rapport au cône d'équation (2), a pour équation

$$ax(\alpha C + \beta' C'' + \beta'' C') + \ldots = 0. \tag{A}$$

Le coefficient de x, dans le premier membre de cette équation, est égal à

$$C(a\alpha + b'\beta' + b''\beta'') + C'(a\beta' + b'\beta + b''\alpha') + C''(a\beta' + b'\alpha'' + b''\beta).$$

Si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut, on voit que

$$\begin{aligned}
a\alpha + b'\beta' + b''\beta'' &= \Delta,\\
a\beta' + b'\beta + b''\alpha' &= 0,\\
a\beta' + b'\alpha'' + b''\beta &= 0;
\end{aligned}$$

ce coefficient se réduit donc à $C\Delta$.

Δ étant $\neq 0$, sans quoi la conique C serait un système de deux droites, ce qui n'est pas supposé, on peut diviser tous les coefficients du premier membre de l'équation (A) par Δ et elle devient alors

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

On déduit de là que M est le pôle, par rapport au cône d'équation (2), du plan tangent à S en A.

2° Soient $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ les équations tangentielles de deux coniques circonscrites au quadrilatère.

L'équation de C sera de la forme

$$C_1 + \lambda C_2 = 0.$$

Les coordonnées du point M seront

$$\begin{aligned}
x &= 2\left[C\,\frac{\partial\Delta(C_1+\lambda C_2)}{\partial(a_1+\lambda a_2)} + C''\ldots + C'\ldots\right],\\
y &= 2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
z &= 2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
t &= -\left[A\,\frac{\partial\Delta(C_1+\lambda C_2)}{\partial(a_1+\lambda a_2)} + \ldots\right].
\end{aligned}$$

Les dérivées de Δ sont du second degré par rapport à λ, puisque ce sont des fonctions du second degré des coefficients de l'équation ponctuelle de C; donc les valeurs trouvées pour x, y, z, t sont fonctions du second degré d'un même paramètre variable λ; donc le lieu est une conique.

3° Soient

$$\Gamma_1 = 0, \qquad \Gamma_2 = 0$$

les équations tangentielles de deux coniques inscrites au quadrilatère; Γ sera de la forme

$$\Gamma_1 + \lambda\Gamma_2 = 0.$$

Les coordonnées du point M seront

$$\begin{aligned}
x &= 2[C(\alpha_1+\lambda\alpha_2) + C''\ldots + C'\ldots),\\
y &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
t &= -[A(\alpha_1+\lambda\alpha_2) + \ldots].
\end{aligned}$$

λ entrant au premier degré dans les quatre équations, le lieu est une droite.

II. — Solution géométrique.

1° La première partie peut se déduire du théorème de Frégier, étendu à l'espace.

Il suffit pour cela de faire une transformation homographique de la figure donnée, telle que la conique C devienne le cercle de l'infini, ce qui est toujours possible.

Dans la figure obtenue, le trièdre $A(A_1 A_2 A_3)$ sera assujetti à être trirectangle, et par suite, d'après le théorème de Frégier, le plan $a_1 a_2 a_3$ passera par un point fixe de la normale en A à la surface S.

Mais cette normale est la droite qui joint A au pôle, par rapport au cercle de l'infini, de l'intersection du plan tangent en A avec le plan de l'infini.

On en déduit homographiquement que, dans le problème proposé :

Le point M *est sur la droite qui joint* A *au pôle, par rapport à la conique, de l'intersection* D *du plan tangent en* A *avec le plan* P.

Autrement dit (en désignant par K le cône qui a pour sommet A et pour base la conique) :

Le point M *est sur la polaire du plan tangent en* A *à la surface* S, *par rapport au cône* K.

2° Supposons maintenant que la conique C varie en passant par quatre points fixes a, b, c, d.

On sait que, dans ces conditions, le pôle par rapport à elle d'une droite fixe de son plan décrit une conique.

Le pôle de la droite D, en particulier, en décrira une, et la droite qui le joint au point A engendrera un cône du second ordre.

Donc le lieu cherché est déjà sur un cône.

Considérons, d'autre part, le triangle diagonal A'_1, A'_2, A'_3 du quadrilatère *abcd*. Il est fixe et fait partie, quelle que soit la conique C, des trièdres $A(A_1A_2A_3)$ assujettis aux conditions de l'énoncé. Le point M est donc constamment dans le plan $a'_1a'_2a'_3$ correspondant.

On déduit de là que le point M se déplace sur une conique.

3° La marche de la démonstration est identique à celle de 2°, mais, au lieu d'une conique et d'un cône, on a une droite et un plan.

Remarques. — Les propriétés des coniques relatives aux polaires étant projectives, les résultats de la première partie de la question ne sont pas changés si l'on remplace la base C du cône K par une autre.

On déduit de là qu'on aurait pu modifier l'énoncé de la manière suivante :

Si l'on considère une surface du second ordre et un cône ayant pour sommet un point A *de cette surface :*

1° *Les plans coupant la quadrique* S *suivant des coniques circonscrites à des triangles conjugués par rapport au cône* K *passent par un point fixe* M.

2° *Quand le cône* K *se déforme en conservant quatre génératrices fixes,* M *décrit une conique.*

3° *Quand le cône* K *se déforme en restant inscrit dans un angle polyèdre de quatre faces fixes,* M *décrit une droite.*