NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AURIC

Formule de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 561-564

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__561_0>

FORMULE DE WARING;

Par M. AURIC,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort.

La formule de Waring exprime une fonction symétrique de la forme

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

en fonction des sommes des puissances semblables des éléments constituants, ces puissances étant elles-mêmes des sommes exclusives des exposants primitifs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

des nombres entiers positifs ou nuls, tels que

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n.$$

Partageons les n exposants en

λ_1 groupes de 1 exposant,
λ_2 groupes de 2 exposants,
. . . . ,
λ_n groupes de n exposants.

Posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \nu$$

et soient

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_\nu$$

les sommes des exposants dans chaque groupe.

Considérons le produit

$$s_{\sigma_1} s_{\sigma_2} \cdots s_{\sigma_n}$$

et faisons toutes les permutations des exposants entre eux qui font acquérir à ce produit une valeur distincte, additionnons-les toutes et soit

$$T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

la fonction des s, ainsi obtenue, qui est évidemment symétrique par rapport aux exposants.

Nous écrirons

$$(1) \qquad \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = \sum \mu T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

μ étant un coefficient fonction de

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n.$$

qu'il s'agit de déterminer. Nous nous appuierons sur la formule évidente, identique,

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = s_{\alpha_n} \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i+\alpha_n} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

En adoptant la formule de représentation (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \mu T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = {} & s_{\alpha_n} \sum \mu' T(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n-1}) \\ & - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum \mu' T'(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n-1}), \end{aligned} \right.$$

ceci est une identité; il n'y a aucune réduction possible dans le second membre, car le premier terme renferme toujours s_{α_n} et le deuxième toujours $s_{\alpha_i+\alpha_n}$; donc un terme quelconque dans le second membre doit trouver son égal dans le premier, et réciproquement.

Il faut toutefois remarquer que si, dans la fonction symétrique

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

développée suivant (1), on considère un groupe de j exposants (il s'en trouve λ'_j), quand on changera chacun de ces j exposants en

$$\alpha_i + \alpha_n, \quad \alpha_{i+1} + \alpha_n, \quad \dots, \quad \alpha_{i+j-1} + \alpha_n,$$

on aura toujours le même résultat, c'est-à-dire qu'il sera répété j fois.

D'ailleurs pour égaliser terme à terme dans (2), il faut évidemment prendre pour les valeurs de

$$\lambda'_1, \quad \lambda'_2, \quad \lambda'_3, \quad \dots, \quad \lambda'_{n-1},$$

soit

$$\lambda_{1-1}, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1}$$

dans le premier terme; soit

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \dots, \quad \lambda_i + 1, \quad \lambda_{i+1} - 1, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1}$$

dans le deuxième terme.

Nous avons alors

$$(3) \qquad \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) = \mu(\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}),$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \\ &\quad = -i\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

C'est de ces deux formules fondamentales que nous allons déduire la forme de μ. Suivons les transformations

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) &= (-i)\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}), \\ &= (-i)[-(i-1)]\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1} + 1, \lambda_i, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{i|1})\mu(\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{i|1})^{\lambda_{i+1}}\mu(\lambda_1 + \lambda_{i+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_i, 0, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= (-1^{1|1})^{\lambda_2}(-1^{2|1})^{\lambda_3}\dots(-1^{n-1|1})^{\lambda_n}\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, 0, 0, \dots, 0) \text{ [1]}. \end{aligned}$$

---

[1] Nous adoptons la notation connue

$$a(a + r)(a + 2r)\dots[a + (n - 1)r] = a^{n|r}.$$

Mais

$$\mu(\lambda, 0, 0, 0. \ldots, 0) = \mu(\lambda - 1, 0, 0, \ldots. 0) = \mu(1, 0, 0, \ldots, 0) = 1;$$

donc

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (-1^{1|1})^{\lambda_2}(-1^{2|1})^{\lambda_3} \ldots (-1^{n-1|1})^{\lambda_n}.$$

On met généralement ce résultat sous une autre forme. Le signe de μ est celui de

$$(-1)^{\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + \cdots + (n-1)\lambda_n},$$

mais

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \ldots + n\lambda_n = x,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_n = \nu$$

c'est donc le signe de

$$(-1)^{n-\nu}.$$

D'ailleurs, en groupant les facteurs, on a

$$\mu = (-1)^{n-\nu}(2)^{\lambda_3 + \lambda_4 \cdots + \lambda_n}(3)^{\lambda_4 + \lambda_5 + \cdots + \lambda_n} \ldots$$
$$(n-2)^{\lambda_{n-1} + \lambda_n}(n-1)^{\lambda_n}.$$

C'est d'ailleurs la forme à laquelle on arriverait en généralisant la formule fondamentale qui nous a servi de point de départ.