L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 424-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__424_1>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (¹);

PAR M. L. MALEYX.

Définitions.

II. Si l'on considère une suite de couples de deux points situés sur une ligne droite, et tels que le produit des distances des deux points formant un couple à un point fixe de la droite soit constant, ces couples de points sont dits placés *en involution*.

Le point fixe de la droite est le *centre* de l'involution, et le produit fixe en est la *puissance*.

Il résulte de cette définition que si l'on considère une suite de cercles ayant un même axe radical, leurs points d'intersection avec une droite quelconque de leur plan sont situés en involution, le centre de cette involution étant placé au point commun de la droite considérée et de l'axe radical commun aux cercles, et la puissance de l'involution étant celle de ce point par rapport aux cercles.

(¹) *Voir* même Tome, p. 240.

Il en résulte encore que, si l'on considère sur une droite quatre points se correspondant deux à deux, que par deux de ces points correspondants on fasse passer un cercle, et par les deux autres un deuxième cercle, tous les autres cercles ayant même axe radical avec les deux précédents formeront, par leur intersection avec la droite, une involution complètement déterminée par les quatre points considérés.

Ainsi, un système de points en involution est déterminé par deux cercles et une droite situés dans le même plan : cette définition ne suppose même pas les deux couples de points donnés réels ; en effet, les deux cercles donnés et la droite associée de leur plan commun peuvent ne pas tous se couper réellement deux à deux.

Si les deux cercles, qui, pris avec une droite de leur plan commun, déterminent une involution, ne coupent pas réellement leur axe radical, ou le coupent réellement en deux points situés d'un même côté de la droite, il existe, parmi les cercles ayant même axe radical avec les deux cercles donnés, deux cercles réels tangents à la droite en deux points qui se correspondent chacun à lui-même, et qui sont dits *points doubles de l'involution;* ces points doubles sont placés à égale distance du centre de l'involution et de part et d'autre de ce centre. Dans ce cas, deux points formant un couple sont essentiellement placés d'un même côté du centre, et de telle sorte que deux points d'un même couple comprennent deux points d'un autre couple, ou soient compris entre ces deux points, si ces quatre points sont situés d'un même côté du centre; la puissance de l'involution est alors positive.

Dans le cas particulier où l'axe radical commun aux cercles deviendrait parallèle à la droite, le centre de l'involution ainsi que l'un des points doubles passeraient à l'infini; le second point double resterait à distance finie, au point de rencontre de la droite et de la ligne des centres des cercles; deux points correspondants quelconques seraient placés à égale distance du point double restant à distance finie; la puissance de cette involution serait infinie.

Si, au contraire, les deux cercles, qui, pris avec une droite de leur plan commun, déterminent une involution, coupent réellement leur axe radical en deux points situés de part et d'autre de la droite, deux points d'un couple se trouvent placés de part et d'autre du centre de l'involution, un seul des points d'un couple se trouve compris entre deux points d'un autre couple; il n'existe pas dans ce cas de point double réel; la puissance de l'involution est alors négative.

Dans tous les cas, si deux points d'une involution forment un couple, les deux points symétriques de ceux-là par rapport au centre forment aussi un couple; le point correspondant au centre passe à l'infini.

Nous avons vu au commencement du présent numéro que deux couples de points a et a', b et b', situés sur une droite déterminaient une involution; si c et c' sont deux points d'un autre couple de la même involution, nous donnerons, pour abréger, la dénomination de *rapport involutif* du point c par rapport aux deux systèmes de points a et a', b et b', au rapport des puissances du point c par rapport aux deux systèmes de points a et a', b et b'; soit : $\frac{ca \times ca'}{cb \times cb'}$.

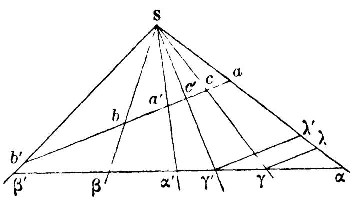
D'après le théorème I, établi au numéro précédent, il est évident que le **rapport involutif** du point c est égal à celui du point c' qui forme couple avec lui; et aussi que, si les **rapports involutifs** de deux points de la droite par rapport à a et a', b et b' sont égaux, ces deux points forment une involution avec a et a', b et b'.

Si l'on considère un système de points en involution et qu'on les unisse par des lignes droites à un point fixe S, pris hors de la droite qui les contient, le système de ces droites de jonction forme un faisceau qui porte le nom de *faisceau en involution,* le point S en est le sommet; dans le cas où l'involution renferme des points doubles, les rayons qui passent par ces points sont dits *rayons doubles.*

III. Théorème. — *Toute sécante rectiligne à un faisceau en involution, ne passant pas par le sommet, détermine par ses intersections avec les rayons du faisceau un système de points en involution.*

Soit $Saa'bb'cc'$ un faisceau en involution (*fig.* 17), coupons-le par la sécante rectiligne $\beta'\alpha$ rencontrant les rayons Sa, Sa', Sb, Sb', Sc, Sc', respectivement en α, α', β, β', γ, γ'; par les points γ, γ', menons $\gamma\lambda$, $\gamma'\lambda'$, parallèles à $b'a$.

Fig. 17.



De la considération des couples de triangles semblables : $\gamma\alpha\lambda$ et $\gamma'\alpha\lambda'$, Sca et $S\gamma\lambda$, $Sc'a$ et $S\gamma'\lambda'$, on déduit les égalités de rapports

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\lambda}=\frac{\gamma'\alpha}{\gamma'\lambda'}, \qquad \frac{\gamma\lambda}{ca}=\frac{S\gamma}{Sc}, \qquad \frac{S\gamma'}{Sc'}=\frac{\gamma'\lambda'}{c'a}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre et réduisant, on a

$$(1)\qquad \frac{\gamma\alpha}{ca}\times\frac{S\gamma'}{Sc'}=\frac{\gamma'\alpha}{c'a}\times\frac{S\gamma}{Sc}.$$

Par des considérations analogues, on trouve

$$(2)\qquad \frac{\gamma\alpha'}{ca'}\times\frac{S\gamma'}{Sc'}=\frac{\gamma'\alpha'}{c'a'}\times\frac{S\gamma}{Sc},$$

$$(3)\qquad \frac{\gamma\beta}{cb}\times\frac{S\gamma'}{Sc'}=\frac{\gamma'\beta}{c'b}\times\frac{S\gamma}{Sc},$$

$$(4)\qquad \frac{\gamma\beta'}{cb'}\times\frac{S\gamma'}{Sc'}=\frac{\gamma'\beta'}{c'b'}\times\frac{S\gamma}{Sc}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), et séparément les égalités (3) et (4), puis divisant la première ainsi obtenue par la deuxième, on a

$$\frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma\beta.\gamma\beta'}\times\frac{cb.cb'}{ca.ca'}=\frac{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'}\times\frac{c'b.c'b'}{c'a.c'a'}.$$

Or, les deux rapports $\frac{ca.ca'}{cb.cb'}$, $\frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}$ sont égaux, car ce sont les rapports involutifs des deux points correspondants c et c' par rapport aux couples de points a et a'. b et b', qui sont en involution avec eux; il en résulte l'égalité des rapports $\frac{\gamma\alpha.\gamma\alpha'}{\gamma\beta.\gamma\beta'}$ et $\frac{\gamma'\alpha.\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta.\gamma'\beta'}$, et comme ces rapports sont les rapports involutifs des points γ et γ' par rapport aux couples de points α et α', β et β', il s'ensuit que ces six points font partie de l'involution déterminée par les couples de points α et α', β et β' (*fin du numéro précédent*).

Remarque I.— Si l'involution définie par les couples de points a et a', b et b' a des points doubles réels, il en est de même de celle qui est définie par les couples de points α et α', β et β', et les points doubles des deux involutions sont deux à deux sur les mêmes rayons ; mais il n'en est pas de même des centres de ces deux involutions, car le centre de chacune d'elles est situé sur le rayon conjugué de celui qui est parallèle à la direction de la sécante ; dès lors, ils ne peuvent être situés sur le même rayon que si les deux sécantes sont parallèles.

Remarque II. — Dans un faisceau en involution il existe toujours, et il n'existe en général qu'un système de rayons rectangulaires; en effet, si nous coupons le faisceau par une sécante quelconque, les points de rencontre de cette droite et des rayons du faisceau forment un système de points en involution. Le cercle variable passant par deux de ces points associés, et par le sommet du faisceau, coupe le rayon qui passe par le centre en un second point fixe; d'après la propriété des sécantes menées d'un point à un cercle. Dès lors il suffira, pour avoir des rayons rectangulaires, de faire passer par ce point et le sommet du faisceau un cercle ayant son centre sur la droite, les rayons passant par les points communs de ce cercle et de la droite seront associés et rectangulaires. Il n'y a, en général, qu'un cercle passant par deux points et ayant son centre sur une droite donnée, d'où résulte qu'il n'y a, en général, qu'un système de rayons rectangulaires. Il ne peut y avoir indétermination que si la droite était perpendiculaire au milieu de celle qui suit les deux points; dans ce cas, tous les rayons associés seraient rectangulaires.

Involution des diamètres conjugués des coniques à centre, et applications.

IV. Nous avons vu au Chapitre I, n^{os} IV et XIV, que les parallèles à deux diamètres conjugués d'une section elliptique, ou hyperbolique, menées par le sommet du cône, déterminaient, sur l'intersection de leur plan avec celui de la base circulaire, deux points dont le produit des distances à un point fixe de cette droite était constant; il résulte du numéro précédent que ces parallèles forment un faisceau en involution; qu'il en est de même des diamètres conjugués de ces deux courbes qui forment un faisceau superposable sur le précédent.

Le faisceau des diamètres conjugués d'une section elliptique n'a point de rayons doubles, puisque le centre de l'involution qu'ils déterminent sur l'intersection du plan de l'ellipse et de celui de la directrice circulaire est situé entre deux points conjugués quelconques (n° IV, Ch. I).

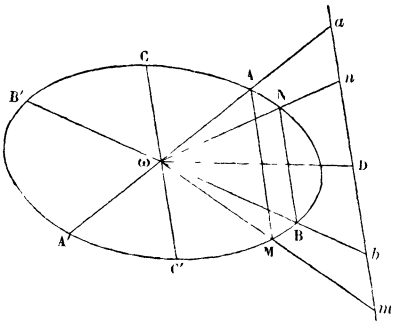
Au contraire, le faisceau des diamètres conjugués de l'hyperbole admet toujours deux rayons doubles qui coïncident avec les asymptotes, comme cela résulte des propriétés des diamètres conjugués de cette courbe, établies au n° XIV (Ch. I). Du numéro précédent résulte alors : 1° *que le système des diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole détermine un système de points en involution sur une droite quelconque du plan de la courbe;* 2° *que le centre de cette involution est le point où la droite est rencontrée par le diamètre conjugué de sa direction.*

Nous nous proposons actuellement de généraliser le lemme établi au n° VII (Ch. I).

Si par deux des extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse on mène deux sécantes parallèles, les secondes extrémités de ces sécantes sont celles de deux autres diamètres conjugués.

Soient ω une ellipse (*fig.* 18), ωA, ωB, deux diamètres conjugués de la courbe; par les points A et B menons les cordes parallèles AM, BN, je dis que ωM et ωN forment un système de deux diamètres conjugués. En effet, construisons le diamètre ωC parallèle aux cordes

Fig. 18.



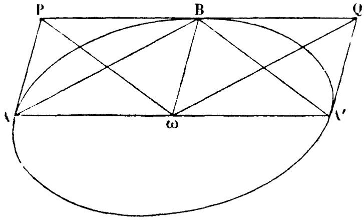
AM, BN, et son conjugué ωD qui les divise en parties égales; menons la droite *am* parallèle arbitraire à ωC, le faisceau des quatre droites ω, ABCD détermine l'involution des diamètres conjugués, et D est le centre de l'involution des points de rencontre des rayons de ce faisceau avec *am*. Or on a évidemment $Dn = Db$ et $Dm = Da$, puisque deux parallèles sont coupées en parties proportionnelles par plusieurs droites issues d'un point; dès lors on a : $Dm \times Dn = Da \times Db$, ce qui montre que ωM, ωN sont conjugués dans le faisceau, et, en conséquence, forment un système de diamètres conjugués.

Remarque I. — Cette propriété a également lieu pour l'hyperbole en définissant, comme nous l'avons fait, l'extrémité d'un diamètre qui ne rencontre pas la courbe.

Le produit des segments interceptés sur une tangente à une ellipse, entre le point de contact et ses *points de rencontre avec deux diamètres conjugués, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente.*

Soient ω une ellipse (*fig.* 19), AA′ un diamètre quelconque, PQ une parallèle tangente en B ; ωB sera le dia-

Fig. 19.



mètre conjugué de AA′, et B le centre de l'involution que détermine sur PQ le faisceau des diamètres conjugués de l'ellipse. Menons les tangentes AP, A′Q aux extrémités du diamètre AA′; elles sont parallèles à ωB et déterminent les deux parallélogrammes ωAPB, ωA′QB.

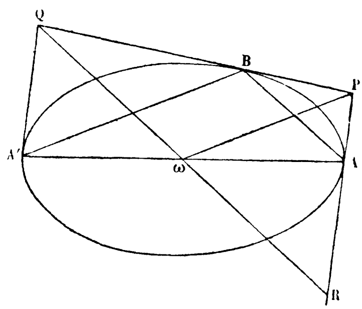
Joignons par des lignes droites ωP, ωQ, AB, A′B; ωP, ωQ, sont deux diamètres conjugués, car ils sont respectivement parallèles à A′B, AB, qu'ils divisent en parties égales; dès lors, le produit des segments BP, BQ, qu'ils interceptent sur la tangente est égal à la puissance de l'involution déterminée sur cette droite par le faisceau des diamètres conjugués; or ce produit est visiblement égal à $\omega A \times \omega A' = \overline{\omega A}^2$, puisque $\omega A = PB$, et $\omega A' = BQ$. C. Q. F. D.

Une tangente en un point variable d'une ellipse intercepte sur deux tangentes parallèles fixes, à partir de leurs points de contact, deux segments dont le pro-

duit est constant et égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction des tangentes fixes.

Soient ω une ellipse (*fig.* 20), AP, A′Q deux tangentes fixes parallèles, dont les points de contact A, A′ sont

Fig. 20.



diamétralement opposés, PQ une tangente mobile dont le point de contact est B; traçons les droites AB, A′B, et les diamètres ωP, ωQ.

Le point P d'intersection des polaires de A et B est le pôle de AB par rapport à l'ellipse; donc la polaire de tout point de AB et en particulier de celui qui est situé à l'infini, passe par le point P, n° XIX, Chap. I; or la polaire du point situé à l'infini sur AB est le diamètre conjugué de la direction de cette droite; donc ωP divise AB en deux parties égales. On verrait de même que ωQ divise A′B en deux parties égales, et il en résulte que chacun des diamètres ωP, ωQ divisant en parties égales les cordes parallèles à l'autre, ces deux diamètres sont conjugués.

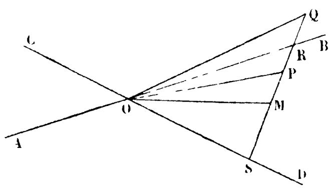
D'après le théorème précédent, le produit des segments AP, AR, interceptés sur la tangente AP par les deux diamètres conjugués ωP, ωQ, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à AP; mais les deux triangles ωAR, ωA′Q sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, d'où résulte l'égalité des côtés AR, A′Q, et, en conséquence, le produit AP × A′Q est aussi égal au carré du demi-diamètre parallèle aux tangentes AP ,A′Q.

Remarque II. — Ces deux propositions s'appliquent également à l'hyperbole : établissons la première, la seconde s'en déduit d'après les mêmes considérations que pour l'ellipse.

Le produit des segments interceptés sur une tangente à une hyperbole entre le point de contact et ses points de rencontre avec deux diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente.

Soient AB, CD, les asymptotes d'une hyperbole dont le centre est O (*fig.* 21), RS une tangente à cette courbe. D'après ce que nous avons vu au n° XVII,

Fig. 21.



Chap. I, son point de contact est placé au milieu M du segment RS intercepté entre les asymptotes, et MR représente le demi-diamètre parallèle à la direction de la tangente MR.

Dans l'involution déterminée sur la tangente par le faisceau des diamètres conjugués, M est le centre, et R et S sont les points doubles; on en conclut

$$\overline{MR}^2 = MP \times MQ,$$

si P et Q sont les points de rencontre de deux diamètres conjugués avec la tangente, ce qui démontre le théorème énoncé.

Enfin, et c'est là une conséquence importante du numéro précédent, *la perspective d'un faisceau en involution sur un plan est encore un faisceau en involution*, puisqu'un rayon du faisceau donné et sa perspective rencontrent au même point l'intersection de leurs plans.

(*A suivre.*)