

CH. BRISSE

**Nouvelle méthode de discussion
de l'équation en S**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 9
(1890), p. 367-372

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9_367_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE MÉTHODE DE DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S ;

PAR M. CH. BRISSE.

Considérons les deux fonctions à coefficients réels

$$\begin{aligned}\varphi &= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy, \\ \sigma &= x^2 + y^2 + z^2,\end{aligned}$$

et cherchons pour quelles valeurs du paramètre **S** l'expression

$$(1) \quad \varphi - S\sigma$$

se réduit à une somme de moins de trois carrés. On sait qu'il est nécessaire et suffisant que **S** soit l'une des racines de l'équation du troisième degré

$$(2) \quad \Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

dite *équation en S*.

PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUATION EN S.

1° *L'équation en S a ses racines réelles.*

Soit, en effet, $(P + Qi)^2 + (U + Vi)^2$ la somme à laquelle $\varphi - S\sigma$ est réductible, P, Q, U, V étant des fonctions linéaires à coefficients réels. En substituant dans l'identité

$$\varphi - S\sigma = (P + Qi)^2 + (U + Vi)^2$$

un système de solutions réelles des équations $Q = 0$, $V = 0$, autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on a une équation à coefficients réels qui fournit une valeur réelle de S, puisque σ n'est pas nul.

2° *Une racine de l'équation en S, pour laquelle l'expression $\varphi - S\sigma$ se réduit à une somme de deux carrés distincts, est simple.*

Car elle n'annule pas la dérivée

$$(3) \quad \begin{cases} -(A' - S)(A'' - S) - (A'' - S)(A - S) \\ -(A - S)(A' - S) + B^2 + B'^2 + B''^2 \end{cases}$$

du premier membre de l'équation (2).

L'identité

$$(4) \quad \varphi - S\sigma = \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2,$$

où ε et ε' désignent les nombres $+1$, -1 , 0 , donne en effet

$$A - S = \varepsilon a^2 + \varepsilon' a'^2,$$

$$A' - S = \varepsilon b^2 + \varepsilon' b'^2,$$

$$A'' - S = \varepsilon c^2 + \varepsilon' c'^2,$$

$$B = \varepsilon bc + \varepsilon' b'c', \quad B' = \varepsilon ca + \varepsilon' c'a', \quad B'' = \varepsilon ab + \varepsilon' a'b',$$

et, en substituant ces valeurs dans l'expression (3), on trouve, d'après l'identité de Lagrange,

$$(5) \quad -\varepsilon\varepsilon'[(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2].$$

résultat différent de zéro, puisque les fonctions

$$ax + by + cz, \quad a'x + b'y + c'z$$

sont distinctes.

3° Une racine de l'équation en S , pour laquelle l'expression $\varphi - S\sigma$ se réduit à un seul carré, est double.

Car, ε' étant nul, l'expression (5) est nulle. Cette racine annule donc la dérivée première de $\Delta(S)$, mais elle n'annule pas la dérivée seconde

$$2(A - S) + 2(A' - S) + 2(A'' - S),$$

car elle la réduit à

$$(6) \quad 2\varepsilon(a^2 + b^2 + c^2).$$

4° Une racine de l'équation en S , pour laquelle l'expression $\varphi - S\sigma$ est identiquement nulle, est triple.

Car, ε et ε' étant nuls, les expressions (5) et (6) sont nulles. Cette racine annule donc la dérivée première et la dérivée seconde de $\Delta(S)$.

De là résulte que réciproquement :

5° Une racine simple de l'équation en S réduit $\varphi - S\sigma$ à deux carrés distincts ;

6° Une racine double de l'équation en S réduit $\varphi - S\sigma$ à un seul carré ;

7° Une racine triple de l'équation en S réduit $\varphi - S\sigma$ à zéro ;

et, d'après les propriétés des formes quadratiques, que :

8° Une racine simple de l'équation en S n'annule pas tous les mineurs du second ordre du déterminant $\Delta(S)$, et réciproquement ;

9° Une racine double de l'équation en S annule tous les mineurs du second ordre et n'annule pas tous ceux du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, et réciproquement ;

10° Une racine triple de l'équation en S annule tous les mineurs du premier ordre du déterminant $\Delta(S)$, et réciproquement.

CONSÉQUENCES.

Deux racines différentes de l'équation en S donnent, pour $\varphi = S\sigma$, deux décompositions d'espèces différentes.

Car si deux racines distinctes S et S' donnaient deux décompositions de même espèce

$$\begin{aligned} \varphi \quad S(x^2 - y^2 - z^2) &= \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2, \\ \varphi \quad S'(x^2 + y^2 + z^2) &= \varepsilon P'^2 - \varepsilon' Q'^2, \end{aligned}$$

on en déduirait

$$(S' - S)(x^2 - y^2 + z^2) = \varepsilon(P^2 - P'^2) + \varepsilon'(Q^2 - Q'^2).$$

Or, en substituant dans cette identité un des systèmes de solutions des équations $P - P' = 0$, $Q - Q' = 0$ autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on annulerait le second membre et on n'annulerait pas le premier.

Il résulte de là que, si les racines de l'équation en S sont toutes différentes, les seules formes de décomposition possibles étant $P^2 + Q^2$, $P'^2 - Q'^2$, $-P''^2 - Q''^2$, chacune des racines S , S' , S'' en donne une et l'on a

$$\begin{aligned} \varphi - S(x^2 - y^2 + z^2) &= P^2 + Q^2, \\ \varphi - S'(x^2 + y^2 + z^2) &= P'^2 - Q'^2, \\ \varphi - S''(x^2 - y^2 + z^2) &= -P''^2 - Q''^2. \end{aligned}$$

On en déduit les identités

$$\begin{aligned}(S' - S)\sigma &= P^2 + Q^2 - Q'^2 - P'^2, \\ (S'' - S')\sigma &= P''^2 + Q''^2 + P'^2 - Q'^2,\end{aligned}$$

et, en substituant dans la première de ces identités un des systèmes de solutions de l'équation $P' = 0$, et dans la seconde un des systèmes de solutions de l'équation $Q' = 0$ autre que $x = 0, y = 0, z = 0$, on en conclut

$$S < S' < S'',$$

c'est-à-dire que :

La plus petite racine donne deux carrés positifs, la plus grande deux carrés négatifs, et la racine moyenne seule décompose $\varphi - S\sigma$ et un produit de deux facteurs réels distincts.

Si l'équation en S a une racine simple S_1 et une racine double S_2 , on a deux décompositions d'espèce différente

$$\begin{aligned}\varphi - S_1(x^2 + y^2 + z^2) &= \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2, \\ \varphi - S_2(x^2 + y^2 + z^2) &= -\varepsilon P'^2.\end{aligned}$$

On en déduit

$$(S_2 - S_1)(x^2 + y^2 + z^2) = \varepsilon(P^2 + P'^2) + \varepsilon'Q^2,$$

et, en substituant un des systèmes de solutions des équations $P = 0, P' = 0$, ou de l'équation $Q = 0$ autre que $x = 0, y = 0, z = 0$, on en conclut que $\varepsilon, \varepsilon'$ et $S_2 - S_1$ ont les mêmes signes, c'est-à-dire que :

La plus petite racine, si elle est double, donne un carré positif et la plus grande deux carrés négatifs; la plus grande, si elle est double, donne un carré négatif et la plus petite deux carrés positifs.

(372)

La méthode s'applique évidemment avec la même facilité à une équation en S de degré quelconque.

REMARQUES.

Si l'on avait

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos \lambda + 2zx \cos \mu + 2xy \cos \nu,$$

ou, en décomposant en carrés,

$$\sigma = (x + y \cos \nu + z \cos \mu)^2 + \left(y \sin \nu + z \frac{\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu}{\sin \nu} \right)^2 + \left(z \frac{H}{\sin \nu} \right)^2,$$

H^2 désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix},$$

il suffirait de poser

$$\begin{aligned} x + y \cos \nu + z \cos \mu &= X, \\ y \sin \nu + z \frac{\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu}{\sin \nu} &= Y, \\ z \frac{H}{\sin \nu} &= Z, \end{aligned}$$

pour ramener l'expression $\varphi - S\sigma$ à la forme

$$\Phi - S(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

et pouvoir appliquer tous les résultats précédents.