Nouvelles annales de mathématiques

Papelier

Autre solution de la question proposée au concours général en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 35-40
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__35_1>

AUTRE SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1889 [1];

PAR M. PAPELIER.

Je prends deux axes rectangulaires passant par le point O, dont l'un Ox est parallèle à l'axe de la parabole P. L'équation tangentielle du cercle est

$$R^2(u^2+v^2) - w^2 = 0.$$

[1] Voir 3e série, t. VIII, p. 288, 298, 33.1 Nous rappelons brièvement l'énoncé :

On donne une parabole P et un cercle dont on désigne le centre par O; soit C l'une quelconque des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle et à la parabole. On demande : 1° l'enveloppe des polaires A du point O par rapport aux coniques C; 2° l'enveloppe des tangentes δ aux coniques C telles que la normale au point de contact passe par O; 3° l'enveloppe des axes des coniques C; 4° les lieux des projections de O sur les polaires A, les tangentes δ et les axes de C.

Quant à celle de la parabole P, nous observerons que l'équation tangentielle

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$

représente une parabole dans le cas où $f = 0$; les paramètres directeurs de l'axe sont d et e; comme l'axe est parallèle à Ox, e est nul et l'équation de la parabole P s'écrit

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw = 0.$$

L'équation générale des coniques C sera alors

$$f(uvw) = \lambda[R^2(u^2+v^2) - w^2] + au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw = 0.$$

1° Soient u, v, w les coordonnées de la polaire A du point O, par rapport à l'une des coniques C. L'équation du pôle est

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0,$$

et, pour que ce pôle soit l'origine, il faut que l'on ait

$$\tfrac{1}{2}f'_u = \lambda R^2 u + au + bv + dw = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_v = \lambda R^2 v + bu + cv = 0.$$

L'élimination de λ donne, pour l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites A,

$$(1)\qquad \tfrac{1}{2}(uf'_v - vf'_u) = bu^2 + (c-a)uv - bv^2 - dvw = 0.$$

On voit immédiatement que cette enveloppe est une parabole : nous l'étudierons tout à l'heure.

2° Soient u, v, w les coordonnées d'une tangente T. On aura

$$(2)\qquad f(u, v, w) = 0.$$

Le point de contact a pour équation

$$Uf'_u + Vf'_v + Wf'_w = 0.$$

La droite qui le joint à l'origine a pour coefficient angulaire $\frac{f'_v}{f'_u}$; pour qu'elle soit perpendiculaire à T, il faut que

$$(3) \qquad \frac{f'_v}{f'_u} = \frac{v}{u}.$$

Éliminant λ entre (2) et (3), nous aurons l'enveloppe des droites T. Cette élimination est toute faite, puisque l'équation (3) ne renferme pas λ. L'équation (3) est donc l'équation de l'enveloppe des droites T. Or cette équation est la même que l'équation (1). Il en résulte que les droites A et T ont pour enveloppe la même parabole (1).

Nous n'avons pas utilisé la condition (1), qui exprimait que la droite T était tangente à la conique C. Il résulte de là que l'équation (1) est l'équation de l'enveloppe des droites Δ qui sont perpendiculaires à la droite joignant le point O à leur pôle.

3° Les axes des coniques C sont perpendiculaires aux droites joignant le point O à leurs pôles; elles jouissent donc des propriétés des droites Δ et, par suite, sont tangentes à la parabole (1).

En conséquence, les trois séries de droites considérées ont la même enveloppe : c'est la parabole

$$b(u^2 - v^2) + (c - a)uv - dvw = 0,$$

qui a son axe parallèle à Oy. Les tangentes issues du point O à cette parabole satisfont à

$$b(u^2 - v^2) + (c - a)uv = 0;$$

elles sont rectangulaires. Donc le point O appartient à la directrice; par suite, la directrice de cette parabole est la droite Ox. Enfin on vérifiera sans peine que le foyer de cette parabole se trouve sur la droite qui joint le point O au foyer F de la parabole P à une distance du point F égale à OF. Il suffit d'observer que les coordonnées du foyer de la parabole

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + bevw = 0$$

sont déterminées par

$$\begin{gathered} ex + dy - b = 0, \\ 2dx - 2ey - a + c = 0, \end{gathered}$$

et de vérifier que les coordonnées du foyer de la parabole (1) sont les doubles de celles du foyer de P. La parabole (1) est donc bien déterminée géométriquement.

Remarque. — Il est aisé d'obtenir géométriquement les résultats qui précèdent.

Observons d'abord qu'étant donnés un point O et une conique C, l'enveloppe des droites Δ perpendiculaires aux droites qui joignent le point O à leur pôle est une parabole. Soit H le pôle de Δ.

Le pôle K de OH se trouve sur Δ et aussi sur la polaire A du point O, en sorte qu'on peut encore définir la droite Δ comme menée par un point de la droite A perpendiculairement à sa polaire. Nous voyons aussi que la droite A est tangente à l'enveloppe cherchée, il suffit de prendre sur A le pôle de la droite passant par O et perpendiculaire à A. En conséquence, par un point quelconque I de A passent deux tangentes à l'enveloppe, la droite A d'une part et la perpendiculaire abaissée du point I sur sa polaire d'autre part; l'enveloppe est donc une conique. Cette conique est une parabole; car, si le point I s'éloigne indéfiniment sur A, la perpendiculaire menée de ce point sur sa polaire est rejetée à l'infini.

Cette parabole est tangente aux deux axes de la conique C, ils correspondent aux points de A situés sur ces axes. Nous appellerons Q cette parabole.

Il nous faut établir que cette parabole est invariable de forme et de position, si la conique C se déplace en demeurant tangente à quatre droites tangentes à un cercle de centre O, c'est-à-dire équidistantes du point O. Il est, en effet, inutile d'introduire la parabole P, puisqu'il existe une parabole et une seule tangente à quatre droites.

On reconnaît sans peine que les tangentes issues du point O à la parabole Q sont les bissectrices des tangentes issues de O à la conique C ; le point O est donc sur la directrice, le point ω, centre de la conique C, également; donc, la directrice est la droite $O\omega$. Or, quand la conique C reste tangente à ces droites, son centre décrit une droite qui passe par le point O. La droite $O\omega$ est donc la même pour toutes les coniques C.

Les tangentes issues du point O à toutes les coniques C forment deux faisceaux en involution ; elles divisent harmoniquement les rayons doubles; or, parmi ces couples de tangentes se trouvent les droites isotropes tangentes issues du point O au cercle. Les rayons doubles sont alors rectangulaires et, par suite, bissectrices de tous les couples de tangentes. Par suite, les tangentes issues du point O à la parabole Q restent les mêmes quand la conique C varie.

Enfin, cherchons à déterminer la tangente au sommet de la parabole Q : il faut mener une tangente parallèle à $O\omega$. Par le point D, je mène OL perpendiculaire à $O\omega$, et du pôle N de OL, j'abaisse NR perpendiculaire sur OL; NR est la tangente au sommet. Quand la conique C varie, le pôle N de la droite fixe OL décrit une droite qui est perpendiculaire à OL, puisqu'elle passe par le pôle de OL relativement au cercle de centre O. Cette droite est la droite NR. Cette droite est donc la même pour toutes les coniques C.

En conséquence, quand la conique C varie, la directrice, la tangente au sommet, les deux tangentes issues du point O restent les mêmes dans la parabole Q. Cette parabole reste donc toujours la même.

Elle est indépendante du rayon du cercle. Considérons la parabole P qui est tangente aux quatre droites, et étudions la parabole Q considérée comme enveloppe des droites Δ dans la parabole P. La directrice de Q sera la droite Ox parallèle à l'axe de P; sa tangente au sommet sera l'axe de P. Soit F le foyer de P. La bissectrice de l'angle FOx est aussi bissectrice des tangentes menées de O à P; cette bissectrice qui coupe l'axe de P en U est donc tangente à Q; par suite, le foyer F′ de Q se trouvera à l'intersection de OF et de la perpendiculaire UF′ à OU. On voit sans peine que

$$FF' = FU = OF,$$

et nous retombons sur les résultats trouvés analytiquement.

4° Tout revient à trouver la podaire du point O par rapport à la parabole Q. Comme le point O est sur la directrice, cette podaire est une strophoïde dont l'équation s'obtient en remplaçant dans l'équation tangentielle de Q, u, v, w respectivement par x, y, $-(x^2-y^2)$; on a

$$b(x^2-y^2)+(c-a)xy+dy(x^2+y^2)=0.$$