NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d’après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 318-337

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__318_0>

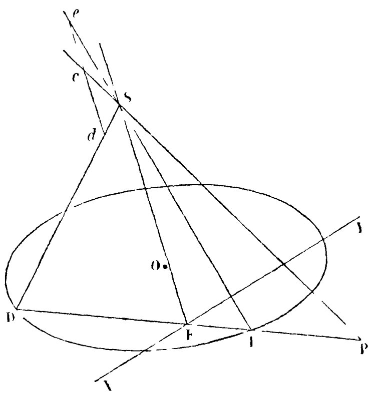
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

PAR M. L. MALEYX.

Du centre et des diamètres dans l'hyperbole ; premières propriétés de direction.

XII. *La section hyperbolique a un centre.* — Soit S le sommet d'un cône dont O est le cercle directeur (*fig.* 7) : considérons une section hyperbolique, le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet coupera le

Fig. 7



plan de la base suivant une droite XY rencontrant la directrice en deux points réels. Soit P le pôle de XY par rapport au cercle directeur, il lui sera extérieur; unissons le pôle P au sommet S par une droite rencon-

---

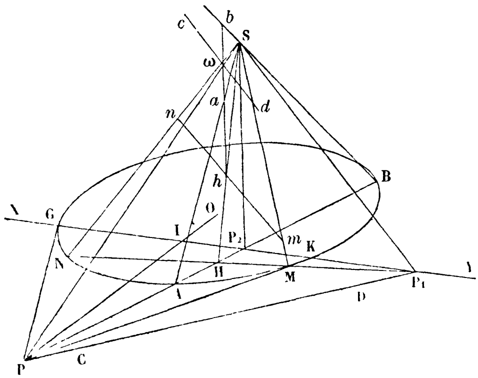
(1) Voir même Tome, p. 240.

trant le plan de la section en c, et faisons passer par cette droite un plan variable dans des limites telles qu'il rencontre le cercle O en deux points D, F, et la polaire XY de P en F. Construisons les génératrices SD, SE, intersection du cône et du plan auxiliaire, et aussi la droite SF : le plan auxiliaire coupera le plan de la section, qui est parallèle au plan SXY, suivant une droite de parallèle à SF et passant par le point c; les points d, e, appartiendront à la section, puisqu'ils sont situés à l'intersection d'une droite du plan sécant et de deux génératrices du cône. Mais le faisceau S.DEFP est harmonique, dès lors la droite dce, parallèle au rayon SF, est divisée par le point c en deux parties égales; on en conclut, par les motifs donnés à l'occasion de la section elliptique (Ch. I, n° II), que le point c est un centre de la section hyperbolique.

XIII. *La section hyperbolique n'admet que des diamètres rectilignes; ces diamètres passent tous par le centre; ils sont conjugués deux à deux. Sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole l'un rencontre la courbe et l'autre ne la rencontre pas.* — Soit S le sommet d'un cône dont le cercle directeur est O (*fig.* 8) : proposons-nous de trouver les diamètres d'une section hyperbolique; pour cela menons par le sommet du cône un plan parallèle à celui de la section, il coupera le plan du cercle directeur suivant la droite XY rencontrant la circonférence en G et K. Menons encore par le sommet S une parallèle à la direction des cordes dont le milieu décrit le diamètre que nous cherchons; cette parallèle coupera XY en un point P_1 ou P_2, qui peut être extérieur ou intérieur au cercle; considérons d'abord le point extérieur P_1.

Construisons la polaire AB du point P_1, et faisons tourner un plan variable autour de SP_1; considérons-le dans la position où il coupe le plan du cercle directeur suivant MN, il coupe le cône suivant les génératrices SM, SN, et le plan SAB suivant SH formant avec SP_1

Fig. 8.



le faisceau harmonique $S.NMHP_1$. Il coupe, en outre, le plan de la section suivant la droite *mn*, corde de l'hyperbole parallèle à SP_1 et dont le milieu *h* est déterminé par son intersection avec SH, rayon conjugué de SP_1. Le point *h*, qui décrit le diamètre cherché, se trouve à la fois dans le plan SAB et dans le plan de la section, qui sont fixes : donc ce diamètre est une ligne droite.

Si la trace du plan variable sur le plan du cercle directeur tourne autour de P_1 depuis la position P_1A, où elle est tangente à ce cercle, jusqu'à la position P_1X, les extrémités de la corde *mn* restent sur la nappe inférieure du cône, et la corde se déplace parallèlement à elle-même depuis la position où elle est tangente en *a* jusqu'à l'infini; et, si cette trace tourne depuis la position P_1B jusqu'à P_1X, les extrémités de la corde *mn* restent sur la nappe supérieure, et la corde *mn* se déplace parallèlement à elle-même depuis la position où elle est tangente en b jusqu'à l'infini; les autres positions du plan variable, et en particulier la position SP_1P, passant par le pôle P de la droite XY, coupent le plan de la section suivant des droites parallèles à mn situées entre les deux branches de la courbe et ne la rencontrant pas.

Le point P_1, pôle de la droite AB, étant situé sur XY, la droite AB passe par le pôle P de XY; et P_2 étant l'intersection des droites AB et XY sera le pôle de la droite P_1P qui unit les pôles de ces droites.

La droite SP_2 et le diamètre ab, dont nous venons d'établir l'existence, sont parallèles, comme intersections du plan de la section et du plan SXY, qui sont parallèles, par le plan SAB; et, comme le faisceau $S.ABPP_2$ est harmonique, ab, parallèle à SP_2, est divisée en deux parties égales par le rayon SP, au point ω qui est le centre de la section.

On verrait de même, en faisant tourner un plan variable autour de SP_2, que les cordes de l'hyperbole qui lui sont parallèles sont divisées par cd en deux parties égales; dès lors cd est le diamètre divisant en parties égales les cordes parallèles à SP_2 qui toutes coupent la courbe en deux points situés un sur chaque branche; ab et cd sont donc deux diamètres conjugués dont l'un rencontre la courbe pendant que l'autre ne la rencontre pas.

XIV. *Propriétés des diamètres conjugués de l'hyperbole. Asymptotes.* — Comme nous l'avons vu pour l'ellipse, n° IV, Chap. I, le triangle PP_1P_2 de la *fig.* 8 est tel que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé; on peut donc aussi lui conserver la qualification d'*autopolaire*.

Les points P_1 et P_2 étant conjugués harmoniques par rapport à G et K sont situés d'un même côté du milieu I de GK, et l'on a la relation $IP_1 \times IP_2 = \overline{IK}^2 = R^2 - \overline{OI}^2$, plus immédiate que dans le cas de la section elliptique.

On peut, comme dans le cas de l'ellipse, s'en servir pour déterminer les axes et les sommets, et aussi deux diamètres conjugués faisant un angle donné, observant que dans le cas actuel : 1° le système des deux axes est toujours déterminé ; 2° le minimum de l'angle aigu de deux diamètres conjugués est zéro, car les directions des deux diamètres conjugués menées par le sommet, soit SP_1 et SP_2, peuvent coïncider suivant SK ou SG.

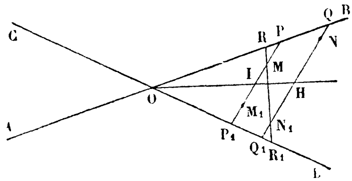
Les mêmes questions peuvent être résolues plus simplement en se fondant sur la remarque importante qui suit.

Remarque. — Les tangentes au cercle O en G et K (*fig.* 8) vont se couper au pôle P de la droite GK, puisque la droite GK passe par les pôles G et K des tangentes. Les plans SPG, SPK sont tangents au cône suivant les génératrices SG, SK qui rencontrent le plan de la section à l'infini. Ces plans tangents coupent le plan de la section suivant les parallèles à SG et SK menées par le centre ω, et tangentes à l'hyperbole aux points situés à l'infini ; ces droites prennent le nom d'*asymptotes*. Les deux diamètres conjugués *ab*, *cd*, et les deux asymptotes, étant respectivement parallèles aux rayons du faisceau harmonique $S.GKP_2P_1$, sont quatre droites formant elles-mêmes un faisceau harmonique, et l'on peut en conclure que *ab* et *cd*, diamètres conjugués de l'hyperbole, forment aussi un système de diamètres conjugués du système des asymptotes. Dès lors, pour résoudre les questions, précédant la présente remarque, pour l'hyperbole, il suffit de les résoudre pour le système des asymptotes, et elles n'offrent alors aucune difficulté.

Propriétés des sécantes à l'hyperbole et au système de ses asymptotes ; construction de la courbe par points ; intersection d'une droite et d'une hyperbole.

XV. Soient AB, CD les asymptotes d'une hyperbole qui se coupent en son centre O (*fig.* 9), une sécante PP_1 rencontrant les asymptotes aux points P et P_1, et la

Fig. 9.



courbe aux points M et M_1, OI le diamètre divisant MM_1 et les cordes parallèles en deux parties égales; il résulte de la remarque du numéro précédent que OI divise aussi PP_1 en deux parties égales; d'où

$$IP = IP_1,$$
$$IM = IM_1,$$

et, retranchant membre à membre, $PM = PM_1$.

C'est-à-dire que *les segments d'une sécante compris entre ses points communs avec la courbe et avec les asymptotes sont égaux.*

La démonstration s'applique évidemment si les points M et M_1 appartiennent à deux branches différentes.

Corollaire. — Si la sécante tourne autour du point M jusqu'à ce que le point M_1 vienne se réunir avec lui, à cet instant elle devient tangente à la courbe en M, et, comme l'égalité $PM = P_1M_1$ a constamment lieu, il en résulte que : *le point de contact d'une tangente à une hyperbole, limitée aux asymptotes, divise cette droite en deux segments égaux.*

Considérons actuellement une seconde sécante QQ_1 parallèle à la première : soient N et N_1 ses points communs avec la courbe; unissons MN_1 par une ligne droite rencontrant les asymptotes en R et R_1 ; d'après ce qui précède, nous aurons les égalités

$$PM = P_1M_1, \qquad PM_1 = P_1M;$$
$$RM = R_1N_1, \qquad RN_1 = R_1M;$$
$$QN = Q_1N_1, \qquad QN_1 = Q_1N.$$

Les deux triangles PRM, QRN_1 sont semblables, et l'on en déduit

$$\frac{PM}{QN_1} = \frac{RM}{RN_1};$$

de la similitude des triangles $R_1N_1Q_1$, R_1MP_1, on tire aussi

$$\frac{Q_1N_1}{MP_1} = \frac{R_1N_1}{R_1M};$$

mais, d'après les égalités précédentes, les seconds membres des deux dernières égalités sont identiques; les deux premiers membres sont donc égaux, d'où :

$$\frac{PM}{QN_1} = \frac{Q_1N_1}{MP_1},$$

ou, en tenant compte des égalités précédentes,

$$\frac{PM}{Q_1N} = \frac{QN}{MP_1}, \qquad \text{et} \qquad MP \times MP_1 = NQ \times NQ_1.$$

C'est-à-dire que *le produit des segments d'une droite* *compris entre un point de la courbe et les asymptotes reste invariable quand la droite se déplace parallèlement à une direction fixe.*

Corollaire. — Ce produit des deux segments d'une sécante est égal au carré du segment de tangente parallèle, et compris entre le point de contact et une asymptote.

On peut déduire de la première de ces propriétés un moyen de construire la courbe par points, quand on connaît ses asymptotes et un point.

Considérons, en effet, les asymptotes AB, CD d'une hyperbole, et un point M de la courbe (*fig.* 9), en menant par le point M la sécante RMR_1 et prenant à partir de R_1 le segment $R_1N_1 = RM$, nous aurons, en N_1, le second point commun de la sécante et de la courbe, et nous pourrons en construire ainsi autant que nous voudrons.

D'après la seconde de ces propriétés, on peut construire, au moyen des mêmes données, les points communs d'une hyperbole et d'une droite quelconque.

Soient à trouver les points communs de l'hyperbole dont on connaît les asymptotes AB, CD, et le point M, (*fig.* 9), avec la droite QQ_1 ; menons par le point M la parallèle PP_1 à QQ_1, il suffira de partager QQ_1 en deux parties QN, NQ_1 ou QN_1, N_1Q_1, telles qu'on ait les égalités

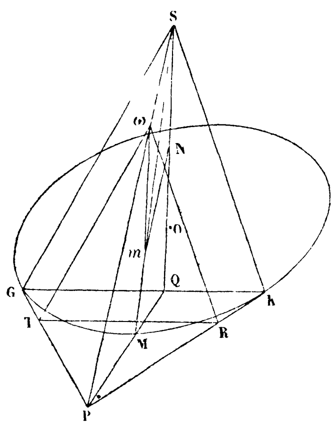
$$QN \times NQ_1 = PM \times MP_1 = QN_1 \times N_1Q_1,$$

ce qui revient à construire un rectangle équivalent à un rectangle donné, connaissant la somme des côtés, problème dont la solution est anciennement connue.

XVI. *Deux droites qui se coupent, considérées comme asymptotes, et un point, définissent une hyperbole.* — Il s'agit de démontrer que, étant données deux droites qui se coupent et un point, on peut construire une hyperbole ayant ces deux droites pour asymptotes et passant par le point.

Pour cela, prenons un cône dont le sommet soit S et le cercle directeur O, et tel qu'il existe sur sa surface

Fig. 10.



deux génératrices SG, SK, faisant un angle égal à celui des droites données, qui comprend le point donné, (*fig.* 10).

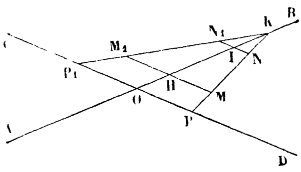
La figure composée des deux droites données et du point donné pourra s'appliquer sur GSK, soit N la position que prendra le point donné après cette superposition. Déterminons le pôle P de la droite GK, menons la droite SP et faisons passer un plan par SP et le point N; ce plan coupera le cône suivant la génératrice SM; menons par le point N la parallèle Nm à SP, et par le point m, où cette droite rencontre SM, la droite $m\omega$ parallèle à SN; enfin par le point ω un plan parallèle à GSK, qui coupera les plans SPG, SPK, suivant les droites ωT, ωR.

La figure formée par les trois droites ωT, ωR, ωm est superposable sur celle qui est composée de SG, SK, SN, car ces droites sont parallèles deux à deux comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et de plus $\omega m = SN$, comme côtés opposés d'un parallelogramme. Il en résulte que les deux droites et le point donnés peuvent s'appliquer simultanément sur ωT, ωR et m, et, comme le plan $T\omega R$ coupe le cône suivant une hyperbole ayant pour asymptotes ωT, ωR et passant par le point m, le théorème se trouve démontré.

Premières propriétés métriques des diamètres de l'hyperbole.

XVII. *Définition de l'hyperbole conjuguée d'une hyperbole donnée.* — Si l'on considère une hyperbole ayant pour asymptotes AB, CD, et passant par le point M (*fig.* 11), que par chacun de ses points on mène des parallèles à une des asymptotes, CD par exemple,

Fig. 11.



et qu'on les prolonge d'une longueur égale au delà de leur point de rencontre avec l'autre asymptote, de sorte que $HM_1 = HM$, $IN_1 = IN$, ..., les points M_1, N_1 ainsi obtenus décrivent une autre hyperbole ayant les mêmes asymptotes et qui est dite conjuguée de la première.

Il suffit, pour justifier cette définition, d'établir que le lieu des points M_1, N_1, ... est une nouvelle hyperbole, ou que, considérant M_1 comme fixe et N_1 comme variable, on a, pour toutes les positions de N sur la première hyperbole, $P_1M_1 = N_1K$, d'après la proposition démontrée au numéro précédent et la construction par points de l'hyperbole établie au n° XV.

Or, les droites MM_1, NN_1 étant parallèles et divisées en parties égales par les points H, I, les droites M_1N_1, MN, vont concourir en un même point K de OB; et les segments P_1M_1, N_1K, proportionnels à PM et NK qui sont égaux (n° XV, Chap. I), sont eux-mêmes égaux.

Il est évident, d'après un théorème connu, que les droites MN, M_1N_1 interceptent sur la deuxième asymptote des segments égaux OP, OP_1 ; dès lors, si l'on unissait le point O aux milieux respectifs de KP, KP_1, on formerait un parallélogramme dont les côtés issus de O constitueraient un système de diamètres conjugués de chacune des hyperboles conjuguées.

Si l'on supposait que le point N se déplaçât sur l'hyperbole à laquelle il appartient jusqu'à ce qu'il vînt coïncider avec M, en même temps N_1 se réunirait à M_1, les deux droites PM, P_1M_1 deviendraient simultanément tangentes aux deux hyperboles et seraient divisées par les points M et M_1 en deux parties égales.

Dans ces conditions, et par définition, OM et OM_1 sont ce qu'on appelle les *longueurs de deux demi-diamètres conjugués* de l'une ou de l'autre des deux hyperboles conjuguées, observant qu'un seul des deux rencontre chaque courbe.

On peut encore remarquer dans cette figure limite que le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués a une de ses diagonales en coïncidence avec une de ses asymptotes, et la seconde diagonale parallèle avec l'autre asymptote.

Et il en résulte qu'une demi-tangente limitée au point de contact et à une asymptote est égale et parallèle au demi-diamètre qui ne rencontre pas la courbe, et qui est conjugué de celui qui aboutit au point de contact.

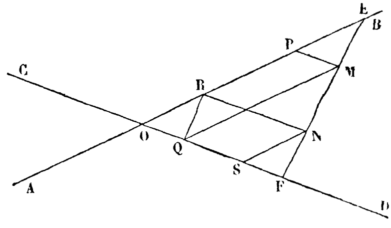
Théorèmes d'Apollonius dans l'hyperbole.

XVIII. D'après ce que nous venons de voir au numéro précédent, il est évident que le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est équivalent au triangle ayant pour base une tangente à l'extrémité de l'un d'eux limitée aux asymptotes, et pour côtés les segments qu'elle intercepte sur les asymptotes; ce triangle est lui-même le double du parallélogramme construit en menant par le milieu de sa base, extrémité du diamètre conjugué de sa direction, des parallèles aux asymptotes.

Il est facile de voir que ce dernier parallélogramme a une surface constante, et qu'en conséquence il en est de même de celle du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués, qui est le double de celle du précédent.

En effet, soient M et N les extrémités de deux diamètres d'une hyperbole ayant pour asymptotes AB et

Fig. 12.



CD (*fig.* 12), construisons les deux parallélogrammes MPOQ, NROS, dont les côtés sont parallèles aux asymptotes, je dis qu'ils sont équivalents. Pour le démontrer, joignons MN par une ligne droite rencontrant les asymptotes en E et F, et unissons QR par une ligne droite; les deux triangles ERN, MQF sont égaux, puisqu'ils sont équiangles et ont des bases égales, EN = MF; il en résulte qu'ils ont même hauteur, et que QR est parallèle à EF; dès lors les figures ERQM, NRQF sont des parallélogrammes équivalents comme ayant les bases EM et NF égales, et même hauteur. Or les parallélogrammes ERQM, POQM d'une part, NRQF, NROS d'autre part, sont équivalents deux à deux; donc de l'égalité ERQM = NRQF, on peut déduire

$$POQM = NROS.$$

ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, le parallélogramme construit sur OM et son demi-conjugué, et le parallelogramme construit sur ON et son demi-conjugué, qui sont les doubles des précédents, sont équivalents.

On en conclut que *le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une hyperbole est égal au rectangle construit sur les demi-axes,* ce qui constitue le premier des THÉORÈMES D'APOLLONIUS.

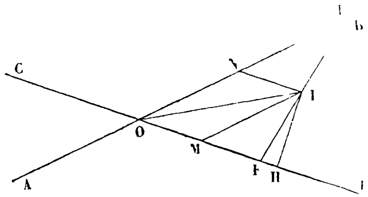
Soit encore EF une tangente à une hyperbole dont les asymptotes sont AB et CD (*fig.* 13), le point de contact I est placé au milieu de EF; OI et IF sont les longueurs des deux demi-diamètres conjugués.

Menons, par le point I, IM et IN respectivement parallèles à AB et CD; IM sera médiane du triangle, et, si nous traçons IH perpendiculaire à OF, nous aurons, d'après un théorème connu,

$$\overline{OI}^2 - \overline{IF}^2 = 4\,OM \times MH.$$

Dans le triangle rectangle IMH, l'angle en M est égal à celui des asymptotes et en conséquence fixe; il en ré-

Fig. 13.



sulte que le rapport des côtés de l'angle droit est constant, soit $\frac{MH}{IH} = \alpha$; nous pouvons dans l'égalité précédente remplacer MH par son égal $\alpha \times IH$, ce qui donne

$$\overline{OI}^2 - \overline{OF}^2 = 4\alpha \times OM \times IH = 4\alpha OMIN,$$

OMIN étant le parallélogramme que nous avons démontré être constant dans le théorème précédent.

De là résulte que *la différence des carrés de deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole est constante et égale à la différence des carrés des demi-axes,* ce qui est le second des Théorèmes d'Apollonius.

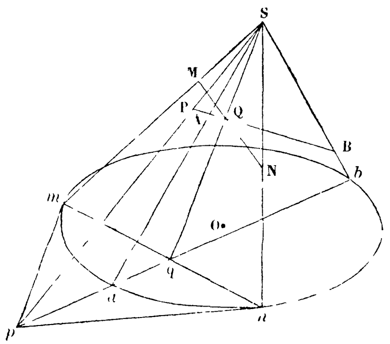
Pôle et polaire dans les coniques.

XIX. Si par un point ou pôle fixe pris dans le plan d'une conique on mène à la courbe une suite de sécantes, on donne le nom de *polaire de ce point* au lieu du point de chaque sécante conjugué harmonique du pôle par rapport à ses points de rencontre avec la courbe. Ce lieu est une droite.

Les propositions connues sur pôles et polaires au cercle sont également vraies pour les coniques.

Soit S le sommet d'un cône dont O est le cercle directeur (*fig.* 14); considérons un plan sécant, et soit P un point de ce plan. Joignons S et P par une ligne droite que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre, p, avec le plan du cercle directeur. Par SP faisons passer un plan variable coupant le cône suivant les génératrices SA, SB, et le plan de la section suivant PAB; nous cherchons le lieu du point Q, conjugué harmonique de P, par rapport à A et B. Le faisceau S.PQAB est harmonique, ses rayons prolongés rencontrent le plan de la base circulaire sur la droite pb, intersection du plan variable et de ce plan

Fig. 14.



de base; les traces a et b de SA et SB sont situées sur la circonférence O, et le point q, trace de SQ, est conjugué harmonique de p par rapport à a et b. Il en résulte que q décrit la polaire mn de p par rapport au cercle O, qu'en conséquence Q se déplace dans le plan Smn et décrit l'intersection de ce plan fixe et du plan de la section, qui est la droite fixe MN.

La polaire du point P par rapport à la conique est donc une droite, perspective, sur le plan de la conique, de la polaire par rapport au cercle O, de la perspective du point P sur le plan de ce cercle.

Il en résulte immédiatement, en remontant aux propriétés des pôles et polaires par rapport au cercle :

Que si le pôle P d'une droite D, par rapport à une conique, est situé sur une droite D_1, réciproquement le pôle P_1 de la droite D_1 est situé sur la droite D;

Que si une droite D_1 tourne autour d'un point fixe P, son pôle P_1 décrit la polaire D du point P;

Que si le pôle P_1 d'une droite D_1 décrit une droite fixe D, cette droite D_1 tourne autour d'un point fixe P, pôle de la droite D.

CHAPITRE II.

De l'involution et de ses usages. Théorèmes et applications.

I. Définitions; deux théorèmes de Géométrie.

Si l'on considère trois points sur une ligne droite, on donne le nom de *puissance* du premier, qui est aussi désigné par un des mots *pôle* ou *centre,* par rapport aux deux autres, au produit des segments interceptés entre le premier et chacun des deux autres; la puissance est considérée comme positive ou négative suivant que les segments sont de mêmes sens ou de sens contraires.

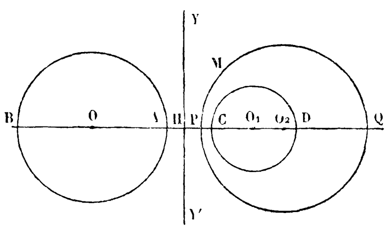
On sait que, si par un point fixe du plan d'un cercle on lui mène une sécante variable, la puissance du point fixe par rapport aux points de rencontre de la sécante et du cercle est un nombre constant, qui a reçu le nom de *puissance* du point par rapport au cercle. Cette *puissance* est représentée en grandeur et en signe par l'excès positif ou négatif du carré de la distance du point au centre sur le carré du rayon; il en résulte que le lieu géométrique des points d'égale puissance par rapport à un cercle est un cercle concentrique.

On sait encore que le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles, situés dans un même plan, est une droite perpendiculaire à la ligne des centres et qui porte le nom d'*axe radical*.

THÉORÈME I. — *Le lieu géométrique des points dont les puissances, par rapport à deux cercles, situés dans le même plan, sont dans un rapport constant, est un troisième cercle ayant avec eux même axe radical.*

Soient O et O_1 les deux cercles donnés, α le rapport caractérisant un point M du lieu (*fig.* 15), YY' l'axe ra-

Fig. 15.



dical des deux cercles O et O_1, on doit avoir par définition, R et R_1 étant les rayons des cercles O et O_1,

$$\frac{\overline{MO}^2 - R^2}{\overline{MO}_1^2 - R_1^2} = \alpha$$

ou

$$\overline{MO}^2 - \alpha\overline{MO}_1^2 = R^2 - \alpha R_1^2. \tag{1}$$

Or on sait que *le lieu des points dont la somme des produits des carrés des distances à deux points fixes* *par des coefficients positifs ou négatifs donnés est constante est une circonférence de cercle dont le centre est sur la droite qui unit les deux points, sauf le cas où la somme des coefficients est nulle, cas auquel le lieu est l'axe radical.*

Le lieu est donc un cercle dont le centre est situé sur la droite qui unit les centres des deux premiers, reste à établir qu'il a avec eux même axe radical. La proposition est évidente pour le cas où les cercles se coupent réellement; car l'égalité (1) est visiblement satisfaite si le point M vient se placer en un des points communs des deux cercles. Pour le démontrer dans le cas où ils ne se coupent pas réellement, exprimons que chacun des points P et Q, où le lieu rencontre le diamètre OO_1, satisfait à l'égalité qui les caractérise, nous aurons

$$\frac{PA \times PB}{PC \times PD} = \alpha, \qquad \text{et} \qquad \frac{QA \times QB}{QC \times QD} = \alpha;$$

ou, reportant l'origine au point H, où l'axe radical des deux premiers cercles rencontre la ligne des centres,

$$(PH + HA)(PH + HB) = \alpha(HC - HP)(HD - HP),$$
$$(QH + HA)(QH + HB) = \alpha(QH - HC)(QH - HD).$$

Ordonnons ces deux égalités, lues au premier membre, par rapport aux puissances décroissantes de HP et HQ, respectivement, observant que $HA \times HB = HC \times HD$, que de plus $HA + HB = 2HO$ et $HC + HD = 2HO_1$, on a

$$\overline{HP}^2(1 - \alpha) + 2HP(HO + \alpha HO_1) + HA \times HB(1 - \alpha) = 0,$$
$$\overline{HQ}^2(1 - \alpha) + 2HQ(HO + \alpha HO_1) + HA \times HB(1 - \alpha) = 0:$$

multipliant les deux membres de la première par HQ, les deux membres de la seconde par HP, et retranchant, on trouve

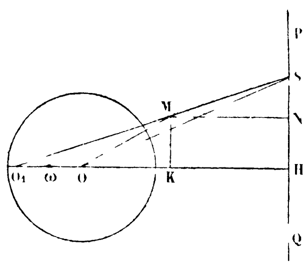
$$(\mathrm{HP} \times \mathrm{HQ} - \mathrm{HA} \times \mathrm{HB})(\mathrm{HP} - \mathrm{HQ})(1 - \alpha) = 0,$$

qui entraîne $\mathrm{HP} \times \mathrm{HQ} = \mathrm{HA} \times \mathrm{HB}$, et établit la proposition, le point H étant d'égale puissance par rapport aux cercles O et O_2.

Théorème II. — *Le lieu géométrique des points dont la puissance par rapport à un cercle donné est à la distance à une droite donnée, comptée parallèlement à une direction donnée, dans un rapport donné, est un cercle ayant la droite donnée pour axe radical avec le cercle donné.*

Soit O le cercle donné dont le rayon est R, PQ la droite donnée, M un point du lieu (*fig.* 16).

Fig. 16.



Remarquons que la distance de M à PQ, comptée parallèlement à une direction donnée, est dans un rapport constant avec la distance MN, normale à PQ; il suffit donc de chercher le lieu demandé pour le cas de la distance normale.

Abaissons, du point O, OH perpendiculaire à PQ, et du point M, MK perpendiculaire à OH; on doit avoir, par définition,

$$\overline{MO}^2 - R^2 = a \times MN,$$

a étant une longueur résultant des données.

Prenons sur OH, en sens contraire de OH si le point M est extérieur au cercle O, et dans le même sens s'il est intérieur, une longueur OO_1 égale à $\frac{a}{2}$, puis désignons par ω le point milieu de OO_1 ; joignons O_1M par une droite rencontrant PQ en S, et SO par une deuxième droite.

Dans le triangle O_1OM, nous avons

$$\begin{aligned}\overline{O_1M}^2 - \overline{OM}^2 = \overline{O_1K}^2 - \overline{OK}^2 &= (O_1K - OK)(O_1K + OK)\\ &= \frac{a}{2} \times 2\omega K = a \times \omega K.\end{aligned}$$

Dans le triangle O_1SO, on trouve de même

$$\begin{aligned}\overline{O_1S}^2 - \overline{OS}^2 = \overline{O_1H}^2 - \overline{OH}^2 &= (O_1H - OH)(O_1H + OH)\\ &= a \times \omega H = a \times (\omega K + KH).\end{aligned}$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{O_1M}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OS}^2 = a \times KH = a \times MN;$$

et, d'après l'égalité de définition,

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{O_1M}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OS}^2 = \overline{OM}^2 - R^2.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\overline{O_1S}^2 - \overline{O_1M}^2 = \overline{OS}^2 - R^2;$$

elle exprime que le point M du lieu appartient à un cercle fixe ayant O_1 pour centre et PQ pour axe radical avec le cercle O. (*A suivre.*)
