L. MALEYX

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 240-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__240_0>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION;

PAR M. L. MALEYX.

CHAPITRE I.

Définitions; classification des sections coniques en trois genres.

I. On donne le nom de *cône à base circulaire* à la surface illimitée engendrée par une droite qui s'appuie constamment sur une circonférence de cercle, et qui, dans son mouvement, ne cesse de passer par un point fixe pris hors du plan de la circonférence; ce point porte le nom de *sommet du cône*.

Le sommet d'un cône divise sa surface en deux parties illimitées qui ont reçu le nom de *nappes*.

On appelle *section conique*, ou simplement *conique*, l'intersection d'un cône à base circulaire par un plan.

Un plan mené par le sommet d'un cône peut avoir par rapport à lui trois positions distinctes; il peut laisser les deux nappes de part et d'autre si sa trace sur le plan de la directrice circulaire ne rencontre pas cette ligne; dans ce cas, le plan n'a de commun avec le cône que le sommet; il peut couper le plan de la directrice circulaire suivant une tangente à cette ligne; dans ce cas, il laisse encore les deux nappes de part et d'autre, mais il a en commun avec le cône deux génératrices confondues suivant celle qui passe par le point de contact, il est alors tangent tout le long de cette génératrice; enfin sa trace sur le plan de la directrice circulaire rencontre cette ligne en deux points, et alors le plan coupe le cône suivant deux génératrices distinctes.

Un plan sécant quelconque est nécessairement parallèle à une des trois positions de plans qu'on vient d'énumérer : de là trois genres de sections. S'il est parallèle à un plan situé dans la première position, il coupe toutes les génératrices sur une même nappe et donne lieu à une section limitée et fermée : c'est la section du genre elliptique ; s'il est parallèle à un plan situé dans la deuxième position, il rencontre encore toutes les génératrices sur une même nappe, sauf celle qui est située dans le plan parallèle mené par le sommet, et donne lieu à une section illimitée composée d'une seule partie : c'est la section du genre parabolique ; enfin, s'il est parallèle à un plan situé dans la troisième position, il rencontre les génératrices sur les deux nappes, sauf celles qui sont situées dans le plan parallèle mené par le sommet, et donne lieu à une section composée de deux parties illimitées : c'est la section du genre hyperbolique.

Il est évident, par considération d'homothétie, que la section par un plan parallèle à celui de la directrice circulaire, et qui est du genre elliptique, d'après ce que nous venons de voir, est aussi circulaire. Il est encore évident, par définition, qu'une section conique ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points, car, s'il en était ainsi, le plan passant par cette droite et le sommet couperait la surface du cône suivant plus de deux droites, et sa trace sur le plan du cercle directeur couperait sa circonférence en plus de deux points.

On appelle *centre d'une courbe* un point qui divise en deux parties égales toutes les sécantes rectilignes qui passent par ce point et qui sont limitées à la courbe de part et d'autre.

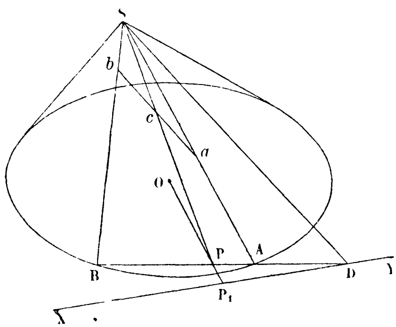
On donne le nom de *diamètre* au lieu géométrique du point milieu d'une sécante, limitée de part et d'autre à une courbe, lorsque cette droite se déplace parallèlement à une direction fixe.

Un diamètre rectiligne perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales est un *axe*, et ses points communs avec la courbe sont des *sommets* de cette ligne.

Du centre et des diamètres dans l'ellipse ; premières propriétés de direction.

II. *La section elliptique a un centre.* — Soit le cône circulaire dont le sommet est S et O le cercle directeur (*fig.* 1); menons par le sommet un plan parallèle au

Fig. 1.



plan sécant; il coupera le plan de la base circulaire suivant une droite, XY, extérieure au cercle directeur.

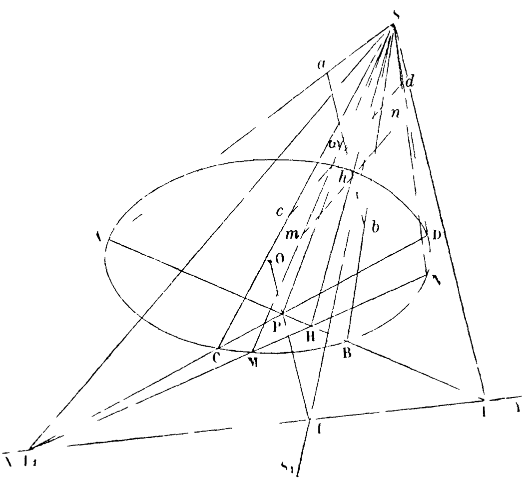
Soit P le pôle de XY par rapport au cercle, unissons le pôle P au sommet S, cette droite coupera le plan sécant en un point c; faisons passer par SP un plan variable, coupant le cercle directeur en A et B et la polaire XY de P en D; construisons les génératrices SA, SB, suivant lesquelles le plan auxiliaire coupe le cône, et traçons également la droite SD. Le plan auxiliaire coupera le plan de la section, qui est parallèle au plan SXY, suivant une parallèle à SD passant par le point c, et rencontrant les génératrices SA, SB, aux points a et b qui appartiendront à la section; or le faisceau S. ABDP est harmonique : dès lors la droite acb, parallèle au rayon SD, est divisée par le point fixe c en deux parties égales.

Les points de la section sont donc situés deux à deux en ligne droite avec le point fixe c, qui divise leur distance en deux parties égales; c est donc un centre de la section, et l'on doit remarquer qu'il est situé à l'intersection du plan de la section avec la droite qui unit le sommet du cône au pôle de la trace, sur le plan et la base circulaire, du plan parallèle au plan sécant mené par le sommet.

III. *La section elliptique n'admet que des diamètres rectilignes; ces diamètres passent tous par le centre; ils sont conjugués deux à deux, c'est-à-dire se distribuent par couples, tels que l'un de ces diamètres divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Soient S le sommet d'un cône et O le cercle directeur (*fig.* 2); proposons-nous de trouver les diamètres d'une section elliptique. Pour cela menons, par le sommet S, un plan parallèle à celui de la section, coupant le plan de la directrice suivant la droite XY qui ne rencontre pas le cercle; menons aussi la droite SP_1 dans la direction des cordes que le diamètre doit diviser en deux parties égales, et qui rencontre XY en P_1. Si nous faisons tourner un plan variable autour de SP_1, il coupera le plan de la section suivant une parallèle à SP_1 dans toutes ses positions. Traçons la polaire AB du point P_1, par rapport au cercle O, et supposons que le plan variable, dans une de ses positions, coupe le plan de la base suivant MN; il coupera le cône suivant les

Fig. 2



génératrices SM, SN, et le plan SAB suivant SH, formant avec SP_1 le faisceau harmonique $S.MNHP_1$. Le même plan coupera le plan de la section suivant la droite *mn* parallèle à SP_1 et divisée en deux parties égales au point *h* par le rayon conjugué SH. Du reste, le point *h* appartient à la fois au plan de la section, au plan SAB, qui sont fixes, et au plan variable SP_1MN; donc le lieu de ce point, qui est le diamètre relatif aux cordes parallèles à SP_1, est la droite d'intersection du plan de la section et du plan SAB qui sont fixes, soit la droite *ab*.

Puisque le pôle P_1 de la droite AB est situé sur XY, la polaire AB de ce point doit passer par le pôle P de XY, et si l'on considère le plan variable dans la position SP_1P, on peut en conclure que le diamètre *ab*, divisant en parties égales les cordes parallèles à SP_1, passe par le centre ω de la section.

Prolongeons AB, polaire du point P_1, jusqu'à sa rencontre avec XY en P_2, la droite P_1CPD, passant par les pôles P_1 et P des droites AB et XY, sera la polaire de leur point commun P_2; il en résulte que le faisceau $S.ABPP_2$ est harmonique; le diamètre *ab* et la droite SP_2 sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et le diamètre *ab* qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_1 passe au centre et est divisé par ce point en deux parties égales.

En cherchant le diamètre qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_2, comme nous l'avons fait pour celui qui divise en parties égales les cordes parallèles à SP_1, nous trouvons la droite *cd* parallèle à SP_1; les diamètres de la section elliptique se partagent donc en couples, tels que chaque diamètre d'un couple divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre : ils sont *conjugués* deux à deux.

IV. *Propriété des diamètres conjugués de la section elliptique.* — Si nous considérons le triangle PP_1P_2 de la *fig.* 2, nous pouvons remarquer que chacun de ses sommets est le pôle du côté opposé par rapport au cercle directeur du cône; on peut, d'après cela, lui donner la dénomination de *triangle autopolaire*.

De plus, comme la polaire d'un point par rapport à un cercle est perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle, il en résulte que les droites OP, OP_1, OP_2, sont respectivement perpendiculaires à P_1P_2, PP_2, PP_1, et qu'en conséquence le point O, centre du cercle directeur, est le point de concours des hauteurs du triangle PP_1P_2.

Les points P et P_1 conjugués harmoniques par rapport à C et D sont situés d'un même côté du point milieu de la corde CD, d'où résulte que l'angle P_2PP_1 est obtus, et que la droite OP, perpendiculaire sur P_1P_2, rencontre cette droite au point I entre P_1 et P_2.

Les deux triangles P_1IO, PIP_2, dont nous n'avons pas tracé le côté OP_1, pour ne pas compliquer la figure, sont semblables; car ils sont rectangles en I et leurs angles IOP_1, IP_2P sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; d'où l'on conclut :

$$\frac{IP_1}{IP} = \frac{IO}{IP_2}$$

ou

$$\begin{aligned} IP_1 \times IP_2 = IP \times IO &= (IO - OP) \times IO \\ &= \overline{IO}^2 - OP \times IO = \overline{IO}^2 - R^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que : *les parallèles à deux diamètres conjugués d'une section elliptique, menées par le sommet du cône, déterminent, sur l'intersection de leur plan avec celui de la directrice circulaire, deux points* P_1, P_2, *situés de part et d'autre de la projection* I *du centre du cercle sur la même droite, et tels que le produit de leurs distances au point* I *soit constant, et égal à la puissance du point* I *par rapport au cercle directeur, au signe près.*

Si l'un des points P_1, P_2 s'éloigne à l'infini, l'autre vient coïncider avec le point I, de sorte que le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à XY a la direction de SI.

Remarque. — Si l'on considère le point P comme un centre d'homothétie, le système de deux diamètres conjugués d'une section elliptique a pour homologue le système de leurs parallèles menées par le sommet du cône, le rapport d'homothétie étant $\frac{P\omega}{PS}$ (*fig.* 2); la droite homologue de XY est la trace du plan de la section elliptique sur celui de la directrice circulaire, et il en résulte que deux diamètres conjugués de la section interceptent sur cette dernière droite, à partir de la projection sur elle du centre O, et de part et d'autre, deux segments qui ont avec IP_1, IP_2, le rapport constant $\frac{P\omega}{PS}$; d'où il suit que le produit de ces segments est aussi constant, puisqu'il est égal à $IP_1 \times IP_2 \times \left(\frac{P\omega}{PS}\right)^2$.

V. *Axes de la section elliptique. — Second système de sections circulaires.* — On déduit facilement du numéro précédent la construction des axes de la section elliptique. Observons d'abord que, dans cette section, chaque diamètre ayant un diamètre associé qui lui est conjugué, à chaque axe correspondra un second axe perpendiculaire au premier et qui formera avec lui un système de diamètres conjugués rectangulaires. Dès lors, et d'après le numéro précédent, pour trouver les parallèles aux axes menées par le sommet S du cône, (*fig.* 2), il suffira de mener par ce point, et dans le plan SXY, un système de deux droites rectangulaires interceptant sur XY à partir du point I, et de part et d'autre, deux segments dont le produit soit égal à la puissance du point I par rapport au cercle O, au signe près. D'après cela, si nous prolongeons SI d'une longueur IS_1, telle que le produit $IS \times IS_1$ soit égal à $\overline{OI}^2 - R^2$, les deux points S, S_1, et ceux où un système de parallèles à deux axes conjugués menées par le point S coupent XY, sont situés sur un même cercle dont le centre se trouve sur XY, à sa rencontre avec la perpendiculaire élevée au milieu de SS_1.

De là sa construction : *Au milieu de* SS_1 *et dans le plan* SXY *on élève une perpendiculaire dont on prend le point commun avec* XY, *de ce point comme centre on décrit un cercle passant par* S *et* S_1, *les points où la circonférence de ce cercle rencontre* XY *étant unis au point* S *par des lignes droites, ces droites donneront les directions d'un système d'axes conjugués.*

Le problème admet toujours une solution, il en admet généralement une seule, d'où résulte que la section elliptique admet un et un seul système de deux axes conjugués qui peuvent être construits. Un seul cas d'indétermination peut se présenter : celui où SS_1 serait perpendiculaire à XY et divisé par cette ligne en I en deux parties égales ; dans ce cas tous les systèmes de diamètres conjugués de la section seraient rectangulaires. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait que le plan SOI fût perpendiculaire à XY, en conséquence au plan du cercle directeur et au plan de la section, ou encore que le plan de la section fût perpendiculaire au plan projetant orthogonalement SO sur le plan de la directrice circulaire; en second lieu qu'on eût l'égalité

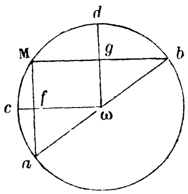
$$IS \times IS_1 = \overline{IS}^2 = \overline{IO}^2 - R^2,$$

ce qui exigerait que la droite IS fût antiparallèle du diamètre IO par rapport aux génératrices du cône passant par les extrémités de ce diamètre.

On peut voir que dans ce cas la section est circulaire ; en effet, considérons cette courbe dans son plan (*fig.* 3) : soit ω son centre. Traçons le diamètre fixe $a\omega b$, et unissons les extrémités a, b à un point quelconque M de la courbe; construisons encore les deux diamètres ωfc, ωgd, qui divisent Ma, Mb en parties égales; ωc,

ωd sont respectivement parallèles à Mb et Ma, puisque dans le triangle aMb ces droites unissent les milieux de deux côtés.

Fig. 3.



Les deux diamètres ωc, ωd sont conjugués, puisque chacun d'eux divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre; de plus ils sont rectangulaires d'après les hypothèses faites; en conséquence, les droites Mb, Ma, qui leur sont respectivement parallèles, sont rectangulaires, et la courbe lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par deux points fixes, a, b, est une circonférence de cercle.

Cette section et les sections parallèles constituent un nouveau système de sections circulaires du cône.

En dehors de ces sections et de celles qui sont parallèles au cercle directeur, il ne peut se trouver d'autres sections circulaires, car ce sont les seules parmi les sections elliptiques, et les autres, étant illimitées, ne peuvent être circulaires.

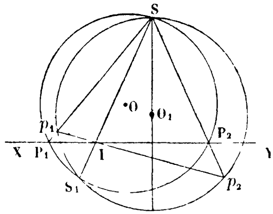
VI. *Construction de deux diamètres conjugués de la section elliptique faisant entre eux un angle donné.* — Si nous nous reportons à la *fig.* 2, et d'après la propriété des diamètres conjugués établie au nº IV, Chap. I, nous voyons que, pour construire les parallèles à deux diamètres conjugués faisant un angle donné menées par le sommet, il suffira, après avoir prolongé SI de IS, satisfaisant à l'égalité

$$IS \times IS_1 = \overline{OI}^2 - R^2,$$

de faire passer par S et S_1 un cercle tel que le segment passant par le point S et intercepté par XY soit capable de l'angle donné, et d'unir au point S ses points communs avec XY.

Ce cercle peut encore être déterminé par les conditions de passer aux points S et S_1 et de couper XY sous l'angle donné. Pour résoudre simplement la question,

Fig. 4.



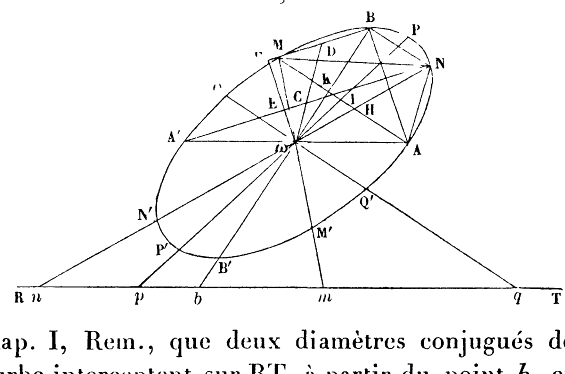
transformons la figure par rayons vecteurs réciproques dans le plan SXY, en prenant S pour pôle et pour puissance le produit $SI \times SS_1$.

Supposant le problème résolu, soit O le cercle cherché, passant par S et S_1, et coupant XY, sous l'angle donné, en P_1 et P_2 (*fig.* 4). La figure inverse de XY sera un cercle O_1 passant par le pôle de transformation S, et par le point S_1 transformé de I, ayant du reste pour diamètre SO_1 perpendiculaire à XY; ce cercle O_1 peut être ainsi facilement construit. La figure inverse du cercle O sera une droite p_1p_2 passant en I point transformé de S_1, et coupant le cercle O_1 sous l'angle donné; cette dernière donnée définit la longueur de la corde p_1p_2 et en conséquence sa distance au centre O_1.

On voit ainsi que le problème admet, généralement, deux solutions, définies par deux positions de $p_1 p_2$ symétriques par rapport à IO_1 ; les rayons cherchés sont les droites Sp_1, Sp_2. On voit toutefois que, le point I étant intérieur au cercle O_1 la corde $p_1 p_2$ ne peut couper ce cercle sous un angle quelconque; l'angle sous lequel se coupent deux diamètres conjugués de la section elliptique a un minimum (aigu), correspondant au minimum de la corde $p_1 p_2$, minimum perpendiculaire à IO_1.

VII. Lemme. — Soit ω une section elliptique, RT la trace de son plan sur celui de la directrice circulaire du cône auquel elle appartient, AA′ le diamètre parallèle à RT, BB′ son conjugué rencontrant RT au point b (*fig.* 5); il résulte de ce que nous avons vu au n° IV,

Fig. 5.



Chap. I, Rem., que deux diamètres conjugués de la courbe interceptent sur RT, à partir du point b, et de part et d'autre, deux segments dont le produit est constant. D'après cela, nous nous proposons de montrer que :

Si par deux des extrémités des diamètres AA′, BB′, *nous menons deux cordes parallèles* AM, BN, *de direction quelconque, les secondes extrémités* M, N *de ces cordes sont aussi celles de deux diamètres conjugués.*

Pour cela, construisons les diamètres MM′, NN′, et prolongeons-les jusqu'à leurs rencontres avec RT en m et n; construisons aussi le diamètre QQ′ parallèle à AM et son conjugué PP′ qui divise AM et BN en parties égales, et prolongeons ces diamètres jusqu'à leurs rencontres avec RT en q et p.

Le faisceau des quatre droites ωP, ωQ, ωA, ωM est harmonique, puisque la parallèle MA au rayon ωQ est divisée par les trois autres en deux parties égales; il en résulte que la parallèle RT au rayon ωA est divisée par les trois autres en deux parties égales; on a donc $mp = mq$, ou, reportant les distances à l'origine b,

$$bp + bm = bq - bm,$$

ou par transposition

$$2bm = bq - bp.$$

Le faisceau formé par les quatre droites ωP, ωQ, ωN, ωB est aussi harmonique, BN parallèle à ωQ étant divisée par les trois autres en deux parties égales; ce faisceau est coupé par RT aux quatre points p, q, b, n, tels que les deux derniers soient conjugués harmoniques des deux premiers, d'où l'on déduit, reportant l'origine des distances au point b,

$$\frac{bp}{bq} = \frac{bn - bp}{bn + bq},$$

ou faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens, transposant et tenant compte de l'égalité précédente,

$$2bp \times bq = bn \times (bq - bp) = 2bm \times bn.$$

$bp \times bq$ est le produit des segments interceptés sur RT à partir du point b par les diamètres conjugués ωP,

ωQ; le produit des segments bm, bn, interceptés de la même manière par les diamètres ωM, ωN, lui étant égal, on doit en conclure que ces diamètres ωM, ωN, sont conjugués, ce qui démontre le lemme énoncé, que nous généraliserons du reste dans le Chapitre suivant.

Premières propriétés métriques des diamètres de l'ellipse. Théorèmes d'Apollonius.

VIII. Considérons toujours la *fig.* 5 : les cordes AM, BN étant parallèles et le diamètre ωP les divisant en parties égales, divise aussi le segment HK de AM en deux parties égales, de sorte que le point I est le milieu commun de AM et de HK; on en conclut $KM = HA$, et $HM = KA$.

De là l'équivalence des triangles $K\omega A$, $H\omega M$, qui ont un sommet commun en ω et leurs bases égales KA, HM, situés sur la même ligne droite; d'où :

$$K\omega A = H\omega M.$$

De même les triangles KAB, HNM sont équivalents, comme ayant les bases KA, HM égales et en ligne droite, et mêmes hauteurs puisque leurs sommets B, N, sont sur une parallèle à la base; d'où :

$$KAB = HMN.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes,

$$\omega AB = M\omega N,$$

c'est-à-dire que le triangle ayant pour côtés deux demi-diamètres conjugués quelconques a une valeur constante égale à celle du triangle ωAB, d'où l'on peut déduire le premier des Théorèmes d'Apollonius, qui s'énonce ainsi : *le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une ellipse est équivalent au rectangle construit sur les deux demi-axes.* On voit, pour les mêmes motifs, les équivalences de triangles :

$$\omega KM = \omega HA, \qquad MKB = HNA,$$

et ajoutant membre à membre :

$$\omega MB = \omega NA\,;$$

du reste ωNA est évidemment équivalent à $\omega NA'$, car ces triangles ont des bases égales de même hauteur ; on en déduit

$$\omega MB = \omega NA'.$$

Il résulte du lemme établi au numéro précédent que les cordes BM, NA′ sont parallèles ; car, si par A′ on mène une parallèle à BM, elle doit passer par l'extrémité du diamètre conjugué à ωM, c'est-à-dire par le point N. (Voir *la note à la fin du présent numéro.*)

Les cordes BM, NA′ étant parallèles, leurs points milieux D, C sont sur un même diamètre ωCD qui sert de médianes aux triangles équivalents ωMB, $\omega NA'$. Si du point ω nous abaissons la perpendiculaire commune ωEF aux cordes parallèles NA′, BM, on a, d'après un théorème connu, dans chacun des triangles ONA′, ωBM,

$$\overline{\omega N}^2 - \overline{\omega A'}^2 = 2\,NA' \times EC,$$

$$\overline{\omega B}^2 - \overline{\omega M}^2 = 2\,BM \times FD,$$

mais les triangles rectangles ωEC, ωFD sont semblables, et l'on en déduit

$$\frac{FD}{EC} = \frac{F\omega}{E\omega}.$$

Multipliant les deux membres par $\frac{BM}{NA'}$, nous avons

$$\frac{BM \times FD}{NA' \times EC} = \frac{BM \times F\omega}{NA' \times E\omega} = \frac{2\omega BM}{2\omega A'N} = 1;$$

d'où $NA' \times EC = BM \times FD$, et introduisant cette égalité dans les deux précédentes,

$$\overline{\omega N}^2 - \overline{\omega A'}^2 = \overline{\omega B}^2 - \overline{\omega M}^2,$$

par transposition et observant que $\omega A' = \omega A$, on a

$$\overline{\omega M} + \overline{\omega N}^2 = \overline{\omega A}^2 + \overline{\omega B}^2,$$

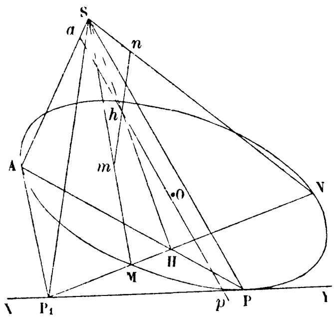
c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques d'une section elliptique est constante, et, en conséquence, égale à la somme des carrés des demi-axes,* ce qui est l'énoncé du second des Théorèmes d'Apollonius.

Note. — Nous avons admis que la parallèle à BM menée par le point A′ passait en N; en effet, si elle n'y passait pas, elle passerait par N′, d'après le lemme cité; mais, comme A′N′ est parallèle à AN, il faudrait que AN fût parallèle à BM; dès lors la figure AMBN serait un parallélogramme, dont les diagonales AB, MN devraient passer par le centre; il faudrait donc que B coïncidât avec A′, ce qui est impossible.

Du centre et des diamètres dans la parabole.

IX. *Le centre de la section parabolique passe à l'infini.* — Supposons qu'un plan, passant par le sommet S d'un cône dont la directrice est le cercle O (*fig.* 6), coupe d'abord le plan de la directrice circulaire suivant une droite XY qui ne rencontre pas cette courbe : un plan parallèle coupera le cône suivant une section elliptique dont le centre sera à l'intersection du plan sécant et de la droite unissant la somme S au pôle P de XY (Chap. I, n° II); si nous admettons actuellement que la droite XY se déplace d'une manière continue en se rapprochant du centre et jusqu'à devenir tangente au cercle directeur, son pôle P viendra se placer au point de contact, la droite SP viendra coïncider avec la géné-

Fig. 6.



ratrice de contact du cône et du plan tangent SXY, et, si le plan sécant reste constamment parallèle au plan SXY à l'instant précis où XY deviendra tangente au cercle O, SP deviendra parallèle au plan sécant, et l'intersection de cette droite avec le plan passera à l'infini dans la direction de SP; comme, au même instant, la section deviendra parabolique, on doit considérer le centre de cette section comme situé à l'infini.

X. *Tous les diamètres de la parabole sont rectilignes et parallèles.* — Considérons toujours la *fig.* 6, construisons la droite SP_1 parallèle aux cordes du milieu desquelles nous cherchons le lieu. La droite SP_1, parallèle au plan sécant, est située dans le plan SXY : construisons la polaire AP du point P_1, le point P_1 étant situé sur XY, la polaire AP passera par le pôle P de XY. Par la droite SP_1 faisons passer un plan variable :

dans toutes les positions il coupera le plan sécant suivant une parallèle à SP_1. Soient SMN une de ses positions, SM, SN les génératrices suivant lesquelles il coupe le cône et SH son intersection avec le plan SAP, les quatre droites SM, SN, SP, SH forment un faisceau harmonique; la droite mn, intersection de ce plan SMN et du plan sécant, et dont les extrémités m, n appartiennent à la section, est divisée en deux parties égales par le point h où elle est rencontrée par le rayon SH conjugué de SP_1, puisqu'elle est parallèle à ce dernier rayon. Le point h dont nous cherchons le lieu est situé à la fois dans le plan sécant et dans le plan fixe SAP, le diamètre cherché est dans la droite ap, intersection du plan sécant et du plan SAP; ap est parallèle à SP comme intersection de deux plans parallèles par un troisième : donc dans la parabole tous les diamètres sont des droites parallèles.

XI. *Propriétés des diamètres de la parabole.* — Les diamètres de la parabole ne coupent cette courbe qu'en un point situé à distance finie; en effet, on peut obtenir tous les diamètres de la parabole en coupant son plan par un plan variable tournant autour de SP (*fig.* 6); or chacun de ces plans coupe le cône suivant la génératrice SP, parallèle au diamètre correspondant, et suivant une seconde génératrice non parallèle; le diamètre rencontrera la seconde seule de ces génératrices à distance finie, et la première à l'infini; il n'aura donc avec la parabole qu'un seul point commun à distance finie.

L'angle sous lequel un diamètre d'une parabole coupe les cordes correspondantes est égal à l'angle PSP_1 de la *fig.* 6; cet angle peut passer par tous les états de grandeur.