G. FOURET

Remarque sur le cas douteux relatif à certains caractères de convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 222-226

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__222_1>

REMARQUE SUR LE CAS DOUTEUX RELATIF A CERTAINS CARACTÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. G. FOURET

1. Parmi les procédés dont on fait le plus souvent usage, pour reconnaître si une série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

est convergente ou divergente, il en est deux, particulièrement simples, qui sont fondés sur la considération des expressions $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$. L'application de l'un ou l'autre de ces caractères permet, avec plus ou moins de facilité, de voir si la série est convergente, sauf dans le cas spécial, appelé *cas douteux,* où l'expression considérée tend vers l'unité, par valeurs inférieures à un, ou bien finit par rester dans le voisinage de l'unité, sans être dès lors constamment supérieure à un, ni constamment inférieure à un nombre assignable plus petit que l'unité.

Nous allons faire voir que *si*, par suite des circonstances que nous venons de rappeler, *l'application du critère basé sur l'expression* $\sqrt[n]{u_n}$ *ne donne aucune con-*

clusion sur la convergence de la série, il en est de même du critère fondé sur la considération de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Cette proposition une fois établie, la réciproque en résultera sans démonstration.

2. Rappelons tout d'abord qu'une série, dont les termes ne décroissent pas indéfiniment, est divergente. Écartons ce cas, dans lequel la question se trouve résolue immédiatement, et supposons que les termes de la série tendent vers zéro. On pourra toujours trouver un nombre entier r assez grand pour que u_r et les termes suivants soient tous inférieurs à l'unité. Il en sera, par suite, de même des expressions telles que $\sqrt[n]{u_n}$, pour toutes les valeurs de n égales ou supérieures à r, les racines d'indice quelconque d'un nombre inférieur à un étant elles-mêmes plus petites que l'unité. Si donc l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ ne fournit aucune indication sur la convergence ou la divergence de la série, cela proviendra de l'impossibilité d'assigner un nombre plus petit que l'unité, auquel $\sqrt[n]{u_n}$ soit inférieure, pour les valeurs suffisamment grandes de n ([1]).

Cela posé, on ne saurait trouver un nombre entier q, tel que, pour toutes les valeurs de n égales ou supérieures à q, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fût plus grand que l'unité; sinon, les termes u_q, u_{q+1}, u_{q+2}, ... formeraient une suite croissante, ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle les termes de la série décroissent indéfiniment.

3. D'autre part, si, pour des valeurs de n égales ou

([1]) Le cas où $\sqrt[n]{u_n}$ tendrait vers un, par valeurs plus petites que l'unité, est évidemment compris dans celui que nous venons d'énoncer. Il est donc inutile de le traiter à part.

supérieures à un certain entier p, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ était constamment inférieur à un certain nombre $\lambda < 1$, de sorte que l'on eût

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \lambda, \qquad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < \lambda, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_{p+k}}{u_{p+k-1}} < \lambda,$$

on en déduirait

$$\frac{u_{p+k}}{u_p} < \lambda^k,$$

ou bien

$$u_{p+k} < u_p \lambda^k,$$

et, par suite

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}}.$$

Deux cas sont à distinguer. En supposant d'abord $\frac{u_p}{\lambda^p} \leqq 1$, on aurait, quel que soit k,

$$\sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} < 1$$

et, par conséquent,

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda.$$

En supposant au contraire $\frac{u_p}{\lambda^p} > 1$ et désignant par μ un nombre pris arbitrairement entre λ et l'unité, on pourrait toujours trouver un nombre entier assez grand pour que l'on eût

$$\lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} < \mu,$$

et à *fortiori*

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \mu,$$

pour toutes les valeurs de k égales ou supérieures à cet entier.

De toute façon, dans l'un et l'autre cas, on pourrait déterminer, pour l'entier n, une valeur telle que, pour toutes les valeurs supérieures à celle-là, $\sqrt[n]{u_n}$ fût inférieur à un nombre déterminé plus petit que l'unité, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite au début de cette démonstration.

4. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne pouvant, pour des valeurs suffisamment grandes de n, ni devenir et rester supérieur à un, ni devenir et rester inférieur à un nombre déterminé, plus petit que l'unité, quelque peu différent qu'il soit de l'unité, on doit en conclure que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, de même que $\sqrt[n]{u_n}$, ne permet aucunement de s'assurer de la convergence ou de la divergence de la série.

Il convient alors, comme on le sait, d'avoir recours à d'autres critères, tels que ceux donnés par Raabe et Duhamel, par M. Bertrand [1], lesquels permettent, dans bien des cas, de lever le doute que laisse subsister l'application de l'un ou l'autre des deux caractères de convergence dont nous venons de nous occuper.

5. Le théorème démontré plus haut (n° 3) peut s'énoncer ainsi :

[1] Ces divers critères, ainsi que celui qui s'appuie sur la considération du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se déduisent presque immédiatement d'un théorème remarquable et bien facile à démontrer, dont l'origine est due à Kummer (*Journal de Crelle*, t. 13), mais qui a été précisé et complété successivement par M. Dini (*Annali dell' Univ. Tosc.*, t. LX), par M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle Borchardt*, t. 76; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVII, p. 941), et par M. Jensen (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 729 et 1520; *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VII, p. 196). — *Voir* également sur ce sujet divers articles intéressants de M. Cesaro (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 1142 et 1791; *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VII, p. 406).

Étant donnée une série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

si, pour les valeurs suffisamment grandes de l'entier n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à un certain nombre $\lambda < 1$, on peut trouver un nombre $\mu < 1$, tel que, pour les valeurs suffisamment grandes de n, l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ soit inférieure à μ.

On démontrerait d'une manière toute semblable cet autre théorème, qui est d'ailleurs sans intérêt au point de vue de la question traitée dans cette Note :

Si, pour les valeurs suffisamment grandes de n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à un certain nombre $\lambda > 1$, on peut trouver un nombre $\mu > 1$, tel que, pour les valeurs suffisamment grandes de n, l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ soit supérieure à μ.

Le mode de raisonnement employé dans la démonstration de ces deux théorèmes est analogue à celui par lequel on démontre que, si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite, il en est de même de $\sqrt[n]{u_n}$, et que les deux limites sont égales ([1]).

([1]) *Voir* notamment NIEWENGLOWSKI, *Cours d'Algèbre*, t. I, p. 281