NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH BERTRAND

# Principes généraux sur le choix des unités, extrait du chapitre XIII des leçons sur la théorie mathématique de l'électricité

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 9 (1890), p. 21-35

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__21_0>

# PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR LE CHOIX DES UNITÉS

Extrait du Chapitre XIII des *Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité;*

PAR M. JOSEPH BERTRAND,
de l'Académie française,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences [1].

1. Une unité est toujours arbitraire. Ce principe semble rendre la théorie facile en la supprimant; il en fait, au contraire, toute la difficulté. Le droit de choisir permet d'imposer des conditions qui deviennent obligatoires, mais restent arbitraires; de là naissent des problèmes toujours faciles et des contradictions qui n'ont d'importance que si l'on oublie leur origine.

Donnons immédiatement quelques exemples.

Prenons pour unité de longueur le chemin parcouru par la lumière pendant l'unité de temps, l'unité de longueur sera proportionnelle à l'unité de temps. On pourra dire et l'on dira, en adoptant une forme de langage très usitée : *une longueur est un temps*.

---

(1) Nous croyons être agréable et utile à nos lecteurs en leur offrant cet extrait d'un Livre, dont la lecture est si attrayante, que son auteur semble l'avoir écrit d'un trait de plume et comme en se jouant, malgré les difficultés réelles que le sujet comporte et qui se trouvent élucidées avec cet art incomparable dont M. Bertrand possède le secret. Les cinq premiers Chapitres ont trait à l'attraction des sphères, au potentiel, au théorème de Green, aux lignes de force; ils forment une sorte d'introduction aux huit Chapitres suivants, qui sont consacrés à l'Électricité statique, aux aimants, aux courants, aux actions électromagnétiques et électrodynamiques, à la théorie de l'Induction et aux machines électromagnétiques. Enfin l'Ouvrage se termine par la théorie des Unités, dont la partie générale fait l'objet du présent extrait. E. R.

Prenons, en second lieu, pour unité de longueur l'espace parcouru pendant l'unité de temps par un corps pesant qui tombe verticalement dans le vide sans vitesse initiale. L'unité de longueur sera proportionnelle au carré de l'unité de temps, et l'on dira, en adoptant le même langage : *une longueur est le carré d'un temps.*

Prenons, par un troisième choix, non moins légitime que les deux premiers, pour unité de longueur le grand axe de l'orbite d'une planète tournant autour du Soleil, placé à son foyer, et dont la révolution s'accomplit dans l'unité de temps. D'après la troisième loi de Kepler, le carré du temps de la révolution étant proportionnel au cube du grand axe de l'orbite, on pourra dire, en adoptant toujours le même langage : *une longueur est la puissance* $\frac{2}{3}$ *d'un temps.*

Adoptons enfin pour unité de longueur la longueur d'onde lumineuse correspondant à une raie donnée du spectre. La mesure d'une longueur deviendra un nombre absolu dans lequel rien ne reste arbitraire, l'unité de longueur étant indépendante de l'unité de temps comme de toute autre. On pourra dire alors : *une longueur est un nombre abstrait;* et, comme un angle, rapport de deux longueurs, est aussi mesuré par un nombre abstrait, on pourra dire, en adoptant toujours le même langage : *une longueur est un angle.* Une ligne de 3,14159 ... longueurs d'onde serait mesurée par $\pi$ et égale à deux angles droits.

Si l'on se demandait, entre ces assertions contradictoires, quelle est la véritable : une longueur est-elle un temps ou le carré d'un temps ? est-il vrai qu'elle soit un angle ? une seule réponse serait à faire : une longueur n'est rien de tout cela, et personne ne peut l'ignorer. Quand on dit, par exemple : une longueur est un temps, cela signifie simplement qu'on a défini les unités de telle sorte qu'une longueur et un temps, ayant même expression numérique, conserveront des mesures égales pour tous les changements d'unité *compatibles avec la convention*. Lorsqu'une longueur est assimilée à un angle, il faut entendre que, l'unité étant définie d'une manière absolue, toute longueur est mesurée par un nombre abstrait que *les conventions faites ne permettent pas de changer*. Ce nombre est la mesure d'un certain angle qu'on acquiert le droit d'assimiler à la longueur; ils peuvent donc se remplacer dans les formules, on s'est enlevé le droit de troubler leur égalité numérique.

Si, pour des raisons qu'il n'est pas nécessaire de chercher, usant du droit donné par le principe qui domine toute la théorie : *les unités sont arbitraires,* on convient de faire varier l'unité de longueur en raison inverse de l'unité de temps, on pourra dire : dans le système d'unités défini par la convention adoptée, *une longueur est l'inverse d'un temps*.

Lorsque, après avoir adopté des conventions relatives aux unités mécaniques ou électriques, nous rencontrerons des conséquences analogues à celles qui viennent d'être indiquées et de forme non moins singulière, il n'y faudra pas attacher plus d'importance et se garder surtout de transformer en une vérité ou de chercher à comprendre une proposition qui, séparée de la convention arbitraire qui l'a fait naître, cesse d'avoir un sens.

2. Les géomètres rattachent à l'unité de longueur l'unité de surface et l'unité de volume. L'unité de surface est le carré de l'unité de longueur et l'unité de volume en est le cube. Une telle dépendance n'est nullement nécessaire. Un volume n'est pas la puissance

troisième d'une longueur. Rien n'empêche d'évaluer les longueurs en mètres et les surfaces en arpents. Les formules de la Géométrie élémentaire, sans cesser d'être parfaites, subiraient un léger changement. La surface du cercle de rayon R ne serait plus exprimée par $\pi R^2$, ni celle d'un triangle de base B et de hauteur H par $\frac{BH}{2}$. Il faudrait diviser ces expressions et celles de toutes les surfaces par le nombre des mètres carrés contenus dans un arpent.

L'indépendance des unités présente un inconvénient plus grave que celui de changer les formules auxquelles on est habitué. Il faudrait renoncer à trouver, pour la mesure de chaque surface ou de chaque volume, une formule indépendante du choix des unités laissées indépendantes. Si S représente une surface, $a$ et $b$ deux lignes dont elle dépend, les nombres qui servent de mesures à $a$ et à $b$ étant donnés, celui qui mesure S reste entièrement inconnu; il est impossible de l'exprimer en fonction de $a$ et de $b$. On pourra démontrer que S est proportionnel au produit $ab$, qu'il est représenté par une expression de la forme $Kab$; mais le coefficient K dépendra du choix de l'unité de surface.

Le choix de l'unité d'angle, arbitraire au même titre que les autres, est dirigé par le respect de la même condition.

Un secteur circulaire de rayon R, dont l'angle au centre est $\omega$, a pour mesure, dans le système adopté, $\frac{R^2\omega}{2}$. Cette formule suppose que l'angle pris pour unité est celui sous lequel on voit du centre d'un cercle un arc égal au rayon. Aucune formule ne pourrait être proposée si l'unité d'angle restait indéterminée, ou, pour mieux dire, la formule changerait avec le choix qui n'est pas encore fait. Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, la surface du secteur dont l'angle est $\omega$, dans un cercle de rayon R, est

$$\frac{\pi R^2 \omega}{4}.$$

Si l'angle pris pour unité est celui d'un degré, la surface du secteur d'angle $\omega$ a pour expression

$$\frac{\pi R^2 \omega}{360},$$

l'unité de surface, bien entendu, étant le carré construit sur l'unité de longueur. Si l'on use du droit de laisser les unités arbitraires, il faudra se borner à dire : la surface d'un secteur circulaire d'angle $\omega$, dans un cercle de rayon R, a pour mesure

$$KR^2 \omega,$$

K étant un coefficient numérique à déterminer quand les unités seront choisies.

3. La Mécanique met en présence des longueurs, des temps, des vitesses, des forces et des masses. Pour chacune de ces grandeurs, l'unité est arbitraire. Aucune dépendance n'est nécessaire. Comme en Géométrie, cependant, et pour la même raison, il est permis et utile d'en introduire une.

Si l'on veut, en écrivant les formules de la Dynamique, ne rien supposer sur les unités, il faut pour chacune d'elles, comme dans l'expression d'une surface ou d'un volume, introduire un coefficient numérique, à déterminer ultérieurement, quand on aura choisi les unités, et à changer chaque fois qu'on voudra faire un choix nouveau.

Lorsqu'une force F agit pendant un temps T sur une masse M partant du repos, l'espace L qu'elle lui fait parcourir est représenté par

$$L = \frac{FT^2}{2M}. \tag{1}$$

Dans la démonstration de cette formule, une convention a été faite. Si, en effet, l'unité de longueur restait arbitraire lorsque les unités de temps, de force et de masse ont été choisies, le premier membre de la formule (1) pourrait recevoir telle valeur numérique que l'on voudrait, lorsque le second serait déjà complètement défini. Toute équation entre L, F, M et T serait impossible.

On a admis en effet, dans la démonstration de la formule (1), que l'unité de force, appliquée à l'unité de masse pendant l'unité de temps, lui fait acquérir l'unité de vitesse, c'est-à-dire la vitesse d'un point qui, dans l'unité de temps, parcourt l'unité de longueur. Cette condition laisse trois unités arbitraires : celles de longueur, de temps et de masse, par exemple, et permet, quand elles sont choisies, d'en déduire les deux autres.

Si l'on multiplie chacune des unités par un facteur numérique :

L'unité de longueur par $\alpha$;
L'unité de temps par $\beta$;
L'unité de masse par $\gamma$;
L'unité de force par $\delta$;
L'unité de vitesse par $\varepsilon$,

les multiplicateurs devront satisfaire, c'est la traduction facile des conventions, aux deux équations

$$\delta = \frac{\gamma\alpha}{\beta^2}, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2}$$

La première de ces équations est nécessaire et suffisante pour qu'une relation de la forme (1) puisse avoir lieu, indépendamment du choix des trois unités non définies. Le coefficient numérique $\frac{1}{2}$ pourrait seul être changé sans introduire de contradiction.

4. Les conventions adoptées rendent possible la mise en équation des problèmes de Mécanique, sans qu'aucun coefficient doive varier avec le choix des unités. Est-ce à dire que ces conventions soient nécessaires et que sans elles la Science deviendrait impossible ? Il n'en est nullement ainsi : la Méeanique pourrait s'enseigner très correctement sans aucune hypothèse relative aux unités ; aucune dépendance n'existe entre elles. Si l'on refuse d'en établir, il en résultera, comme pour la Géométrie quand l'unité de surface reste indépendante de l'unité de longueur, la nécessité d'introduire des facteurs numériques variables avec le choix des unités, et très faciles à déterminer dans chaque cas. La formule (1), par exemple, serait remplacée par

$$L = K \frac{F}{M} T^2,$$

K étant un coefficient numérique. Si, par exemple, l'unité de masse étant celle dont le poids est $9^{gr}$, on prend pour unité de longueur le kilomètre, pour unité de temps la minute et pour unité de force le kilogramme, il faudrait remplacer la formule (1) par

$$L = 1800 \frac{FT^2}{M}.$$

5. La possibilité de mettre en équation tous les problèmes de la Mécanique et, par conséquent, de les résoudre en laissant trois unités arbitraires, sans qu'aucun coefficient variable avec le choix de ces unités s'intro-

duise dans les formules, impose aux équations un caractère nécessaire que l'on peut appeler l'*homogénéité* en Mécanique. Supposons que la solution d'un problème, qu'il est inutile de définir, ait donné une relation entre une force F, une longueur L, un temps T et une masse M. Cette relation, étant mise sous la forme

$$\text{(3)} \qquad L = \varphi(F, M, T),$$

devra rester la même si les unités sont multipliées par les facteurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, liés par la première des relations (2); la fonction $\varphi$ sera telle, par conséquent, que

$$\text{(4)} \qquad \alpha L = \varphi\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta^2} F, \gamma M, \beta T\right).$$

Cette équation, ayant lieu quels que soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, détermine la forme de la fonction. Le premier membre étant proportionnel à $\alpha$, le second doit l'être aussi, et, comme $\alpha$ ne figure que dans $\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}F$, il faut que $\varphi$ soit proportionnel à F; on aura donc

$$\text{(5)} \qquad L = \frac{\gamma}{\beta^2} F \varphi_1(\gamma M, \beta T).$$

Le premier membre de (5) étant indépendant de $\gamma$ et de $\beta$, le second doit l'être aussi, et $\varphi_1$, pour cela, doit être inversement proportionnel à $\gamma M$ et proportionnel à $\beta^2 T^2$; on doit donc avoir enfin

$$\text{(6)} \qquad L = K \frac{F}{M} T^2.$$

K désignant une constante numérique.

6. Le temps T de l'oscillation d'un pendule, pour un angle donné d'écartement, dépend de la longueur L du fil, de la masse M qui oscille et du poids de cette

masse qui est une force F. L'équation qui lie ces grandeurs étant nécessairement de la forme (6), on aura, en la résolvant par rapport à T et désignant par G un coefficient numérique égal à $\frac{1}{\sqrt{K}}$,

$$(7) \qquad T = G\sqrt{L\left(\frac{M}{F}\right)}.$$

Si l'on nomme $g$ le poids de l'unité de masse, on obtient la formule connue

$$T = G\sqrt{\frac{L}{g}},$$

G étant un coefficient numérique déterminé pour chaque valeur de l'angle d'écartement $\theta$, c'est-à-dire une fonction inconnue de $\theta$.

7. Le temps de l'oscillation d'une corde vibrante dépend de sa longueur L, de sa masse M et du poids F qui la tend. Si nous admettons ce théorème comme une vérité expérimentale, la formule, devant être de la forme (6), sera

$$(8) \qquad T = G\sqrt{\frac{ML}{F}}.$$

Si $\rho$ désigne la densité et $r$ le rayon de la section de la corde, on a

$$M = \pi r^2 L \rho,$$

et la formule (8) devient

$$(9) \qquad T = G\sqrt{\pi}\, L r \sqrt{\frac{\rho}{F}},$$

qui exprime la loi du temps de vibration d'une corde, en ne laissant à la théorie que le coefficient numérique G à déterminer.

8. La vitesse de propagation du son dans un gaz dépend de l'élasticité et de la densité du gaz. En admettant qu'il en soit ainsi, les mêmes principes peuvent déterminer la forme de la relation.

Définissons la vitesse de propagation $v$ par le temps T nécessaire pour parcourir une distance L. L'élasticité E de l'air peut être définie par la pression F exercée par le gaz sur la surface $L^2$; on aura $F = EL^2$, et il est permis de choisir cette surface ainsi que la distance à parcourir, évidemment arbitraires toutes deux, de manière à n'introduire qu'une seule longueur L. La densité D est le rapport de la masse au volume. Soit M la masse de volume $L^3$, L désignant toujours la même longueur; on aura

$$D = \frac{M}{L^3}.$$

La formule qui exprime la vitesse du son ayant lieu entre une longueur, une force et une masse, elle est nécessairement de la forme (6), et l'on peut écrire

$$F = K\frac{ML}{T^2}. \qquad (10)$$

En remplaçant la force F par $EL^2$, la masse M par $DL^3$, on aura

$$EL^2 = K\frac{DL^4}{T^2} \qquad (11)$$

ou

$$T = L\sqrt{K\frac{D}{E}}.$$

Le temps T est donc proportionnel à la distance L; le mouvement est *nécessairement* uniforme, et l'on a, en nommant $v$ la vitesse, égale à $\frac{L}{T}$,

$$v = \sqrt{\frac{E}{D}\frac{1}{K}},$$

K étant un coefficient numérique.

Il est évident que, si la vitesse dépend d'autres données, du rapport des deux caloriques spécifiques par exemple, la démonstration n'est plus valable.

9. Les formules de la Mécanique peuvent être démontrées et tous les problèmes résolus en laissant trois unités arbitraires. Le droit de les laisser arbitraires implique celui d'établir entre elles telle relation qu'on voudra choisir, et l'on peut profiter de cette liberté pour simplifier certaines formules sans perdre l'avantage d'employer les équations ordinaires de la Science.

On démontre, en étudiant la théorie des mouvements planétaires, qu'un point matériel parcourant, dans un temps T, la circonférence d'une ellipse dont le grand axe est $2a$, si la force qui le sollicite est dirigée vers le foyer, cette force, rapportée à l'unité de masse, a pour expression, à la distance $r$ du foyer, $\frac{\mu}{r^2}$, et l'on a

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

La loi de la gravitation universelle est déduite de ces théorèmes. En désignant par F l'attraction mutuelle de deux masses $m$ et $m'$ concentrées en deux points dont la distance est $r$, cette loi est exprimée par l'équation

$$F = f\frac{mm'}{r^2};$$

$f$ est un coefficient numérique qui dépend du choix des unités.

La présence d'un tel coefficient dans une formule générale ne doit pas plus surprendre que celle de la gravité $g$ dans l'expression de la durée de l'oscillation du pendule ; $g$, de même que $f$, dépend du choix des unités et s'introduit dans les formules parce qu'elles sont relatives à un système particulier dont les éléments n'ont rien d'arbitraire.

Pour faire disparaître ce coefficient $f$, il suffit de choisir les unités de manière à le réduire à l'unité. Cela peut se faire d'une infinité de manières. On prendra pour unité de masse celle qui, agissant sur une masse égale à la sienne, à une distance égale à l'unité, exerce une attraction égale à l'unité de force. Cette condition, arbitrairement imposée, réduit à deux le nombre des unités qui restent arbitraires; mais on fait usage, en l'acceptant, d'un droit qui n'est pas contestable.

La formule

$$\text{(12)} \qquad F = \frac{mm'}{r^2}$$

étant imposée, il ne reste que deux unités arbitraires. Il faut supposer entre les coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, définis au n° 3, la relation nouvelle

$$\text{(13)} \qquad \delta = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}.$$

Sans cette convention, en effet, les deux membres de (12) seraient multipliés par des facteurs différents et cesseraient d'être égaux si l'on changeait les unités adoptées.

L'équation (13) équivaut, en vertu de la relation (12) qui subsiste, à

$$\text{(14)} \qquad \gamma = \frac{\alpha^3}{\beta^2}.$$

L'attraction du Soleil sur l'unité de masse d'une planète étant représentée par $\frac{\mu}{r^2}$, on a

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Il résulte d'ailleurs de la convention adoptée que $\mu$ doit représenter la masse du Soleil. Le rapport $\frac{\mu}{a^3}$, rapport d'une masse à un volume, représente donc une densité, et par conséquent, dans le système d'unités adoptées, la densité d'un corps est l'inverse du carré d'un temps. Un angle étant un nombre abstrait, on peut dire qu'une densité est le carré d'une vitesse angulaire.

Cherchons dans ces hypothèses la densité du Soleil.

Le demi-grand axe de l'orbite terrestre est égal à 222 fois le rayon R du Soleil. Si donc on nomme D la densité cherchée, on aura

$$D = \frac{\mu}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi}{T^2}\left(\frac{a}{R}\right)^3.$$

En remplaçant $\frac{a}{R}$ par 222, le temps T de la révolution, évalué en secondes, surpasse 31 000 000, et la densité D du Soleil, en prenant la seconde pour unité de temps, est inférieure à $\frac{1}{10^7}$.

**10.** Lorsque, comme on a été conduit à le faire en Géométrie et en Mécanique et comme nous le ferons dans la théorie de l'Électricité, on établit une dépendance entre les unités, il importe d'indiquer par une notation convenue comment varient les unités dérivées quand on change les unités fondamentales.

Si, par exemple, on prend pour unité de surface le carré de l'unité de longueur, la première de ces unités variant proportionnellement au carré de la seconde, on écrira, pour exprimer cette dépendance,

$$[S] = [L^2].$$

On écrira, de même, en désignant les volumes par la lettre V,

$$[V] = [L^3];$$

ces notations n'ont pas, je crois, besoin d'explications.

En nommant $v$ les vitesses, on écrirait, en adoptant les mêmes conventions,

$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right].$$

En désignant les forces par la lettre F, les masses par M, les longueurs par L et les temps par T, on écrirait, pour représenter la relation (2) entre les unités adoptées pour ces diverses grandeurs,

$$(15) \qquad [F] = \left[\frac{ML}{T^2}\right].$$

Il ne s'agit pas, on le comprend, d'une égalité numérique entre les deux membres de l'équation dans lesquels ne figure aucune grandeur déterminée, mais de l'indication des variations simultanées que subiront les unités désignées par les lettres initiales des grandeurs correspondantes.

11. La convention faite (8) s'exprimera, d'après la notation que nous venons d'indiquer, par

$$(16) \qquad [M] = \left[\frac{L^3}{T^2}\right].$$

L'unité de longueur et l'unité de temps restent arbitraires; l'unité de masse sera déterminée quand on les aura choisies, et l'équation (15) donnera, les deux hypothèses étant associées,

$$[F] = \left[\frac{L^4}{T^4}\right]. \tag{17}$$

Une force, dans ce système, est la quatrième puissance d'une vitesse; si une force et la quatrième puissance d'une vitesse ont la même mesure numérique, l'égalité subsistera, quelque choix d'unités que l'on fasse, pourvu que les conditions, arbitrairement prescrites, il ne faut jamais l'oublier, soient respectées.