NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BARISIEN

Concours pour les bourses de licence (Toulouse 1888)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 9 (1890), p. 200-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1890_3_9__200_0>

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (TOULOUSE 1888).

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

On donne une ellipse rapportée à ses axes et sur cette ellipse un point $M(x', y')$: *former l'équation générale des coniques osculatrices à l'ellipse au point* M.

Exprimer que cette équation représente une parabole; démontrer ensuite que, par un point $P(\alpha, \beta)$ *du plan, il passe quatre de ces paraboles, que les quatre points* (x', y') *correspondants sont situés sur deux droites parallèles et que, parmi eux, deux au plus sont réels.*

Former l'équation d'une parabole passant par les quatre points (x', y') *qui correspondent à un point* (α, β), *et trouver le lieu décrit par ce dernier point lorsque la parabole en question passe par un point fixe du plan.*

On sait que, si $U = 0$ représente la droite qui touche en un point M une conique $S = 0$,

$$S - \lambda U^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques qui ont avec S, au point M, un contact du troisième ordre.

Dans le cas présent, cette équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \lambda\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = 0, \tag{1}$$

avec la condition

$$(2) \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

qui exprime que le point $M(x', y')$ appartient à l'ellipse donnée

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En écrivant que l'équation (1) représente une parabole et tenant compte de (2), on trouve que le paramètre λ doit être égal à l'unité; en sorte que la parabole osculatrice à l'ellipse donnée au point M a pour équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = 0$$

ou, en réduisant et ayant égard à (2),

$$(4) \qquad (xy' - yx')^2 + 2(b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2) = 0.$$

Pour construire cette parabole, cherchons les coordonnées des points d'intersection de la parabole, avec la droite

$$b^2xx' + a^2yy' = 0,$$

parallèle à la tangente en M et menée par le centre O de l'ellipse donnée. On trouve, pour ces coordonnées,

$$x = \frac{ay'\sqrt{2}}{b}, \qquad y = \frac{bx'\sqrt{2}}{a};$$

mais les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse donnée avec cette même parallèle à la tangente sont

$$x = \frac{ay'}{b}, \qquad y = \frac{bx'}{a}.$$

Si donc on mène le diamètre OI conjugué à OM, et si on le prolonge jusqu'au point J tel que

$$OJ = OI\sqrt{2},$$

le point J appartiendra à la parabole osculatrice.

Cette construction indique que la parabole osculatrice est extérieure à l'ellipse.

Si la parabole osculatrice passe par un point $P(\alpha, \beta)$ du plan, on a

$$(5)\qquad (\alpha y' - \beta x')^2 + 2(b'\alpha x' + a^2\beta y' - a^2 b^2) = 0,$$

$$(6)\qquad b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 = 0.$$

La résolution de ces deux équations doit donner quatre valeurs de x' et y'.

Ces équations, lorsqu'on y considère x' et y' comme des coordonnées courantes, représentent, l'une, l'ellipse donnée et l'autre une parabole tangente à la polaire de P à son point d'intersection avec PO.

Cette parabole et l'ellipse ayant même diamètre ont un couple de cordes communes, formé par deux droites parallèles à la polaire de P.

Si le point P est à l'extérieur de l'ellipse, il est visible que la parabole (8) ne coupe l'ellipse qu'en deux points.

Si le point P est à l'intérieur de l'ellipse, la parabole (5) est tout entière extérieure à l'ellipse; car, si l'on coupe ces deux courbes par la droite

$$b^2\alpha x' + a^2\beta y' = 0.$$

on trouve, en appelant, comme précédemment, I son point d'intersection avec l'ellipse et J avec la parabole,

$$OJ = OI\sqrt{2}.$$

Donc, quand le point P est à l'intérieur de l'ellipse, les quatre points correspondants (x', y') sont imaginaires.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de (5) et (6) est

$$(\alpha y - \beta x)^2 + 2(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2 b^2) \\ + \lambda(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) = 0.$$

En exprimant que cette conique est une parabole, on trouve

$$\lambda = -\left(\frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}{a^2 b^2}\right)$$

et, pour l'équation de cette parabole,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2\beta x + b^2\alpha y)^2 - 2a^2 b^2(b^2\alpha x + a^2\beta y) \\ &\qquad - a^2 b^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2a^2 b^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si cette parabole passe par un point fixe (p, q) du plan, le point (α, β) décrit le lieu dont l'équation est

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2\beta p + b^2\alpha q)^2 - a^2 b^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2a^2 b^2) \\ &\qquad - 2a^2 b^2(b^2\alpha p + a^2\beta q) = 0 \end{aligned} \right.$$

ou, en développant,

$$a^4\beta^2(p^2 - b^2) + 2a^2 b^2 pq\alpha\beta \\ + b^4\alpha^2(q^2 - a^2) - 2a^2 b^2(b^2 p\alpha + a^2 q\beta - a^2 b^2) = 0.$$

C'est une conique dont le déterminant est

$$\Delta = -a^6 b^6\left(\frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{a^2} - 1\right);$$

la conique (8) est donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point (p, q) est intérieur ou extérieur à l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ou situé sur cette courbe.