

LUCIEN LÉVY

Note sur l'équation d'Euler et de Poisson

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 545-552

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__545_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'ÉQUATION D'EULER ET DE POISSON;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

M. Darboux a démontré (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 69) pour les équations de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m(1-m)z}{(x-y)^2}$$

et M. Appell a étendu (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. VI, p. 314) aux équations

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{x-y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

un théorème dont voici l'énoncé :

Si l'on a obtenu une solution quelconque

$$\varphi(x, y)$$

de l'équation (2), on pourra en déduire la solution plus générale

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right) = \varphi_1(x, y).$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques.

Je dis que cette propriété est caractéristique des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui peuvent se ramener à la forme (2). En d'autres termes, *si l'on a constaté qu'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre admet en même temps que la solution $\varphi(x, y)$ la solution*

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

où a, b, c, d désignent des constantes quelconques, cette équation a nécessairement la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\beta'}{x-y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Soit, en effet, l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0. \end{cases}$$

1° Je vais exprimer qu'elle admet, en même temps que la solution

$$z = \varphi(x, y),$$

toutes les solutions comprises dans la formule

$$z_1 = \varphi(x', y'),$$

où $x' = x - \lambda$ et $y' = y - \lambda$, λ étant une constante quelconque. Remarquons pour cela que

$$\frac{\partial x + \beta z_1}{\partial x \partial y \beta} = \frac{\partial x + \beta z_1}{\partial x' \partial y' \beta}.$$

Je puis donc, pour exprimer que z_1 est solution de l'équation (3), me borner à remplacer dans cette équation x par $\lambda + x'$, y par $\lambda + y'$, effacer les accents donnés aux variables et l'indice de z_1 , et exprimer que l'équation ainsi obtenue admet les mêmes solutions que l'équation (3). Désignons par $A', B', C', \dots$ ce que deviennent les coefficients $A, B, C, \dots$ quand on y remplace x par $\lambda + x$ et y par $\lambda + y$. La nouvelle équation sera

$$(4) \quad \begin{cases} A' \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + B' \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + C' \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} \\ + D' \frac{\partial z}{\partial x'} + E' \frac{\partial z}{\partial y'} + F'z + G' = 0. \end{cases}$$

Pour que cette équation ait les mêmes solutions que

l'équation (3), il faut et il suffit que leurs coefficients soient proportionnels; nous laissons de côté le cas où la solution d'où l'on part serait fonction de $x - y$ seulement, ce qui peut arriver pour un groupe de solutions, mais non pour toutes les solutions de l'équation (3). On aura donc

$$\frac{B'}{A'} = \frac{B}{A}, \quad \frac{C'}{A'} = \frac{C}{A}, \quad \frac{D'}{A'} = \frac{D}{A}, \quad \dots$$

Je dis qu'il en résulte que tous les quotients $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, ... sont des fonctions de $x - y$. Posons en effet

$$\frac{B}{A} = f(x, y),$$

on devra avoir

$$f(x - \lambda, y + \lambda) = f(x, y)$$

ou, en supposant que la fonction $f(x, y)$ soit développable par la formule de Taylor,

$$f(x, y) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\lambda^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \dots = f(x, y).$$

Cette égalité devant avoir lieu quelle que soit la valeur de λ , il en résulte

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

et, par suite,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} (dx - dy) = \frac{\partial f}{\partial x} d(x - y);$$

$f(x, y)$ est donc bien une fonction de $x - y$.

2° Nous pouvons donc supposer que les coefficients $A, B, C, \dots$ de l'équation (3) sont tous des fonctions de $x - y$. Je vais exprimer que cette équation admet, en même temps que la solution

$$z = \varphi(x, y).$$

toutes les solutions contenues dans la formule

$$z_1 = \varphi(ax, ay),$$

où a désigne une constante arbitraire. Nous poserons encore

$$x' = ax,$$

$$y' = ay.$$

Nous aurons ici

$$\frac{\partial^{x+\beta} z_1}{\partial x^x \partial y^\beta} = a^{x+\beta} \frac{\partial^{x+\beta} z_1}{\partial x'^x \partial y'^\beta}.$$

On en conclut, par un raisonnement analogue au précédent, que les deux équations suivantes devront être vérifiées en même temps

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz + G = 0, \\ a^2 A' \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + a^2 B' \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y} + a^2 C' \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ + aD' \frac{\partial z}{\partial r} + aE' \frac{\partial z}{\partial y} + F'z + G' = 0, \end{aligned}$$

en désignant par $A', B', C', \dots$ les valeurs prises par les fonctions $A, B, C, \dots$ quand on y remplace x et y par $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$.

On déduit de là

$$\begin{aligned} \frac{A}{A'} &= \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \\ \frac{A}{aA'} - \frac{D}{D'} &= \frac{E}{E'}, \\ \frac{A}{a^2 A'} &= \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}. \end{aligned}$$

Posons

$$\psi(x-y) = \frac{B}{A}$$

et, par suite,

$$\psi\left(\frac{x-y}{a}\right) = \frac{B'}{A'}.$$

Nous devons avoir, quelle que soit la valeur donnée à a ,

$$\psi\left(\frac{x-y}{a}\right) = \psi(x-y).$$

Il faut donc que $\psi\left(\frac{x-y}{a}\right)$ soit indépendante de a , c'est-à-dire constante.

Soit de même

$$\psi_1(x-y) = \frac{D}{A},$$

on devra avoir

$$\psi_1(x-y) = \frac{1}{a} \psi_1\left(\frac{x-y}{a}\right).$$

Faisons

$$a = x-y,$$

il vient

$$\psi_1(x-y) = \frac{1}{x-y}, \quad \psi_1(1) = \frac{k}{x-y}.$$

De même,

$$\frac{E}{A} = \frac{k'}{x-y}.$$

Un raisonnement analogue montre que $\frac{F}{A}$ et $\frac{G}{A}$ sont des fonctions de la forme $\frac{\alpha}{(x-y)^2}$: l'équation proposée devient donc

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x-y \frac{\partial z}{\partial x} \\ + \frac{E}{x-y} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{F}{(x-y)^2} z + \frac{G}{(x-y)^2} = 0; \end{array} \right.$$

les lettres A, B, C, ... désignent maintenant des quantités constantes.

3° Je vais enfin exprimer que l'équation ci-dessus admet, avec la solution

$$z = \varphi_1(x, y),$$

la solution

$$z_1 = x^k y^{k'} \varphi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Posons encore

$$\frac{1}{x} = x', \quad \frac{1}{y} = y',$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} &= k x^{k-1} y^{k'} \varphi_1(x', y') - x^{k-2} y^{k'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}, \\ \frac{\partial z_1}{\partial y} &= k' x^k y^{k'-1} \varphi_1(x', y') - x^k y^{k'-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'}, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} &= x^{k-2} y^{k'} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'^2} \\ &\quad + (2 - 2k) x^{k-3} y^{k'} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} + k(k-1) x^{k-2} y^{k'} \varphi_1(x', y'), \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} &= x^{k-2} y^{k'-2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x' \partial y'} \\ &\quad - k' x^{k-2} y^{k'-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} - k x^{k-1} y^{k'-2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + k k' x^{k-1} y^{k'-1} \varphi_1, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} &= x^k y^{k'-4} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y'^2} \\ &\quad + (2 - 2k') x^k y^{k'-3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + k'(k'-1) x^k y^{k'-2} \varphi_1(x', y'). \end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans l'équation proposée, écrivons $\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{y'}$ au lieu de x et de y , effaçons les accents et écrivons z au lieu de φ_1 ; nous obtenons la nouvelle équation

$$\begin{aligned} A x^{k-k} y^{k-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B x^{2-k} y^{2-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ - C x^{-k} y^{k-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dots - G \frac{x^2 y^2}{(x-y)^2} = 0. \end{aligned}$$

Cette équation doit admettre les mêmes solutions que la proposée : il faut donc que

$$\frac{A x^{k-k} y^{k-k'}}{A} = \frac{B x^{2-k} y^{2-k'}}{B} = \frac{C x^{-k} y^{k-k'}}{C} = \dots = \frac{G x^2 y^2}{G}.$$

Ces quatre rapports ne peuvent être égaux sans que trois des quatre coefficients soient nuls : d'où deux

hypothèses possibles, puisqu'on ne peut évidemment annuler en même temps A, B et C.

1° B = C = G = 0, A = 1.

L'équation transformée ne peut dans ce cas être identifiée avec l'équation proposée.

2° A = C = G = 0, B = 1.

L'équation transformée devient

$$\begin{aligned} x^{2-k} y^{2-k'} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{D x^{-k+3} y^{-k'+1}}{x-y} - k' x^{2-k} y^{1-k'} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \\ + \left(\frac{E x^{1-k} y^{3-k'}}{x-y} - k x^{1-k} y^{2-k'} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \\ + \frac{F x^2 y^2}{(x-y)^2} - \frac{D k x^{2-k} y^{1-k'}}{x-y} \\ - \frac{E k' x^{1-k} y^{2-k'}}{x-y} + k k' x^{1-k} y^{1-k'} = 0. \end{aligned}$$

En l'identifiant avec l'équation (5), nous obtenons les trois identités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{D}{x-y} &= \frac{D r}{y(x-y)} - k' y^{-1}, \\ \frac{E}{x-y} &= \frac{E r}{x(x-y)} - k x^{-1}, \\ \frac{F}{(x-y)^2} &= \frac{F x^k y^{k'}}{(x-y)^2} - \frac{k D}{y(x-y)} - \frac{k' E}{x(x-y)} + k k' x^{-1} y^{-1}. \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\begin{cases} D = k', \\ E = -k, \\ F = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned} k' &= D = 0, \\ -k &= E = 0, \\ F &\text{ indéterminé,} \end{aligned}$$

d'où les deux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{k'}{x-y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{k}{x-y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{F}{(x-y)^2} z = 0.$$

La dernière équation se déduit de la précédente si l'on y suppose $k = k'$ (voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 56). On trouve donc dans tous les cas une équation d'Euler et de Poisson. c. q. f. d.