

J. LEMAIRE

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1889

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 503-508

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_503_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1889;

PAR M. J. LEMAIRE,

Professeur au lycée de Lorient.

I. Si nous désignons par b l'ordonnée de l'axe d'une parabole P, par a l'abscisse de l'axe d'une parabole Q, les paraboles P auront pour équation générale

$$(P) \quad (y - b)^2 - 2px = 0$$

et les paraboles Q

$$(Q) \quad (x - a)^2 - 2qy = 0.$$

Les paraboles P et Q ayant leurs axes perpendiculaires, toute conique (C) passant par les points de rencontre d'une des paraboles P et d'une des paraboles Q aura ses axes parallèles aux axes de ces paraboles, c'est-à-dire à Ox et Oy.

Si donc (x_0, y_0) est le centre de C, l'équation de cette conique sera de la forme

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

Il s'agit de trouver le lieu du centre de cette conique à la condition qu'elle passe constamment par les points communs à l'une des paraboles P et à l'une des paraboles Q.

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des deux paraboles P et Q correspondant à deux valeurs déterminées de a et b est

$$(1) \quad [(y - b)^2 - 2px] + \lambda[(x - a)^2 - 2qy] = 0,$$

qui représentera la conique C si l'on a

$$\frac{A}{\lambda} = \frac{B}{1} = \frac{Ax_0}{p + \lambda a} = \frac{By_0}{b + \lambda q} = \frac{Ax_0^2 + By_0^2 - 1}{b^2 + \lambda q^2}.$$

Éliminant λ , a , b entre ces relations, nous aurons le lieu du centre. On tire sans difficulté

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{A}{B}, \\ a &= \frac{Ax_0 - Bp}{A}, \\ b &= \frac{By_0 - Aq}{B}, \end{aligned}$$

d'où le lieu cherché

$$B \left[\frac{(By_0 - Aq)^2}{B^2} + \frac{A}{B} \frac{(Ax_0 - Bp)^2}{A^2} \right] = Ax_0^2 + By_0^2 - 1$$

ou

$$2Bpx + 2Aqy = \frac{A^2q^2}{B} + \frac{B^2p^2}{A} + 1.$$

Cette équation représente une droite.

Si l'on fait tourner la conique C de 90° autour de son centre, son équation devient

$$B(x - x_0)^2 + A(y - y_0)^2 - 1 = 0.$$

A cette position de la conique correspondra une autre droite dont nous aurons l'équation en permutant A et B dans la précédente. Le lieu des centres demandé se compose donc de deux droites.

II. L'équation aux x des points communs à une parabole P et à une droite

$$(D) \quad y = mx + n$$

est

$$(mx + n - b)^2 - 2px = 0;$$

d'où, pour la condition de contact de cette courbe et de cette droite,

$$[m(n - b) - p]^2 - m^2(n - b)^2 = 0.$$

On tire de là

$$n = b + \frac{p}{2m}.$$

La tangente à P de coefficient angulaire m est donc

$$y = mx + b + \frac{p}{2m}.$$

On trouve de même pour la tangente à Q de coefficient angulaire m l'équation

$$y = mx - \frac{m}{2} (2a + qm).$$

m sera le coefficient angulaire d'une tangente commune si l'on a

$$b + \frac{p}{2m} = -\frac{m}{2}(2a + qm)$$

ou

$$qm^3 + 2am^2 + 2bm + p = 0.$$

Telle est l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes à P et Q : il y a trois pareilles tangentes. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ leurs angles avec Ox; $\tan \alpha_1, \tan \alpha_2, \tan \alpha_3$ sont les racines de l'équation ci-dessus, et l'on a

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &= \frac{\Sigma \tan \alpha_1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2 \tan \alpha_3}{1 - \Sigma \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \\ &= \frac{-\frac{2a}{q} + \frac{p}{q}}{1 - \frac{2b}{q}} = \frac{p - 2a}{q - 2b}. \end{aligned}$$

Soit, d'autre part, α l'angle que fait avec Ox la droite joignant les foyers de P et Q; on a

$$\tan \alpha = \frac{b - \frac{q}{2}}{\frac{p}{2} - a} = \frac{2b - q}{p - 2a}.$$

Par conséquent,

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\cot \alpha,$$

d'où

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = +\alpha + n\pi - \frac{\pi}{2},$$

n étant un nombre entier, ce qui démontre la seconde partie de la question.

Les axes de P et Q ont pour équations

$$y = b,$$

$$x = a.$$

Le lieu de leur point commun est donc la droite

$$2y - q = (p - 2x) \tan \alpha.$$

III. Proposons-nous de déterminer a et b de manière que les paraboles P et Q aient trois de leurs points communs confondus en un seul.

L'équation en λ du système des coniques

$$(y - b)^2 - 2px = 0,$$

$$(x - a)^2 - 2qy = 0$$

est

$$q^2\lambda^3 + 2bq\lambda^2 + 2pa\lambda + p^2 = 0,$$

qu'on obtient sans difficulté en annulant le discriminant du premier membre de l'équation (1).

Les paraboles P et Q auront trois points confondus en un seul si cette équation a une racine triple. λ désignant cette racine, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda = -\frac{2b}{q}, \\ 3\lambda^2 = \frac{2pa}{q^2}, \\ \lambda^3 = -\frac{p^2}{q^2}, \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \sqrt[3]{pq^2}, \\ b = \frac{3}{2} \sqrt[3]{p^2q}, \\ \lambda = -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}. \end{array} \right.$$

Pour cette valeur de λ , (1) représente un système de deux droites dont le centre est précisément le point de contact de P et Q. Les coordonnées de ce point sont

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a + \frac{p}{\lambda}, \\ y_1 = b + q\lambda \end{array} \right.$$

ou, en remplaçant a , b , λ par leurs valeurs et simplifiant,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{pq^2}, \\ y_1 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{p^2q}. \end{cases}$$

Quant au coefficient angulaire de la tangente commune en ce point, il a pour valeur

$$-\frac{2p}{2(y_1 - b)} = -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

IV. Soit (x, y) un ombilic des paraboles P et Q. L'équation aux coefficients angulaires des tangentes à P issues de ce point est

$$y = mx + b + \frac{p}{2m}$$

ou

$$2x.m^2 + 2(b - y)m + p = 0.$$

De même, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du même point à Q est

$$q m^2 + 2(a - x)m + 2y = 0;$$

les équations devant avoir les mêmes racines, on a

$$\frac{2x}{q} = \frac{b - y}{a - x} = \frac{p}{2y},$$

d'où

$$xy = \frac{pq}{4}.$$

Ce qui montre que les points de rencontre des tangentes communes à une parabole P et une parabole Q se trouvent tous sur l'hyperbole équilatère représentée par l'équation ci-dessus.