

T.-J STIELTJES

Sur un passage de la théorie analytique de la chaleur

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 472-478

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_472_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PASSAGE DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

La méthode suivie par Fourier pour obtenir le développement

$$(A) \quad 1 = a \cos x + b \cos 3x + c \cos 5x + d \cos 7x + \dots$$

est très belle, mais elle manque absolument de rigueur, et l'on peut même s'étonner, au premier abord, qu'un tel procédé puisse conduire à un résultat exact.

Fourier pose $x = 0$ dans l'équation (A) et dans celles qu'on en déduit par des différentiations successives. Il obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + d + \dots, \\ 0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + \dots, \\ 0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + \dots, \\ 0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

n de ces équations lui fournissent les n premiers coefficients en annulant tous ceux qui suivent, et, en prenant ensuite $n = \infty$, on constate que les valeurs obtenues pour $a, b, c, d, \dots$ tendent vers des limites déterminées.

C'est ainsi qu'il obtient le résultat cherché

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \dots$$

Nous nous proposons d'étudier de plus près cette méthode.

1. Il est clair que la détermination des $a, b, c, d, \dots$ d'après Fourier revient à ceci :

Déterminer les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$ de manière que le développement de

$$\varphi_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x$$

soit de cette forme

$$\varphi_n(x) = 1 + k_n x^{2n} + k_{n+1} x^{2n+2} + \dots$$

Pour obtenir $\varphi_n(x)$ et en même temps une expression simple de $1 - \varphi_n(x)$, nous remarquons que l'identité

$$(2i \sin x)^{2n-1} = (e^{ix} - e^{-ix})^{2n-1}$$

donne facilement, en développant le second membre,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (\sin x)^{2n-1} &= A_n \left[\sin x - \frac{n-1}{n+1} \sin 3x \right. \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \sin 5x \\ &\quad \left. - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sin 7x - \dots \right], \\ A_n &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n)}. \end{aligned} \right.$$

On en conclut

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^x (\sin x)^{2n-1} dx \\ &= B_n - A_n \left[\cos x - \frac{1}{3} \frac{n-1}{n+1} \cos 3x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \cos 5x - \dots \right], \\ B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n-1} dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}. \end{aligned} \right.$$

Or il est clair que le développement de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n-1} dx$$

commence par un terme en x^{2n} : donc on a nécessairement

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_n(x) = \frac{A_n}{B_n} \left[\cos x + \frac{1}{3} \frac{n+1}{n+1} \cos 3x \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \cos 5x - \dots \right], \end{cases}$$

$$(4) \quad 1 - \varphi_n(x) = \int_0^x (\sin x)^{2n+1} dx : \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx.$$

Fourier n'a pas donné explicitement l'expression de $\varphi_n(x)$, mais on peut la déduire facilement de ses formules et constater l'identité avec la formule (3). On a notamment

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots (2n-1)^2}{(3^2-1)(5^2-1)(7^2-1)\dots[(2n-1)^2-1]}$$

et il est facile de conclure, d'après la formule de Wallis,

$$(5) \quad \lim \frac{A_n}{B_n} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Supposons que x soit compris entre $\pm \frac{\pi}{2}$ (sans atteindre une de ces limites), la formule (4) permettra facilement de conclure

$$\lim [1 - \varphi_n(x)] = 0, \quad n = \infty.$$

En effet, soit

$$G_n = \int_0^x (\sin x)^{2n+1} dx,$$

il est clair que

$$G_{n+1} < G_n \sin^2 x$$

et

$$B_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} B_n,$$

donc

$$\frac{1 - \varphi_{n+1}(x)}{1 - \varphi_n(x)} = \frac{G_{n+1}}{B_{n+1}} : \frac{G_n}{B_n} < \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sin^2 x.$$

λ étant un nombre fixe compris entre $\sin^2 x$ et 1, le rapport

$$[1 - \varphi_{n+1}(x)] : [1 - \varphi_n(x)]$$

sera donc constamment inférieur à λ à partir d'une valeur suffisamment grande de n , d'où l'on conclut

$$(6) \quad \lim [1 - \varphi_n(x)] = 0, \quad n = \infty.$$

On verra de la même façon que

$$(7) \quad \lim \frac{1}{\Lambda_n} \int_0^x (\sin x)^{2n-1} dx = 0.$$

Or on a

$$\frac{1}{\Lambda_n} \int_0^x (\sin x)^{2n-1} dx = \frac{B_n}{\Lambda_n} - \left(\cos x - \frac{1}{3} \frac{n-1}{n+1} \cos 3x + \dots \right)$$

et

$$\lim \frac{B_n}{\Lambda_n} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, pour achever la démonstration de la formule

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots,$$

il suffira de faire voir qu'en posant

$$S = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots,$$

$$S' = \cos x - \frac{1}{3} \frac{n-1}{n+1} \cos 3x + \frac{1}{5} \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \cos 5x - \dots,$$

on a

$$\lim (S - S') = 0, \quad n = \infty.$$

3. Remarquons d'abord qu'en écrivant

$$S' = a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x - \dots,$$

les coefficients $a_1, a_3, a_5, \dots$ sont positifs et vont en diminuant.

Soit, m étant un entier impair,

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{m} \cos mx - \frac{1}{m+2} \cos(m+2)x + \dots \\ &\quad \pm \frac{1}{m+2k} \cos(m+2k)x, \\ R'_m &= a_m \cos mx - a_{m+2} \cos(m+2)x + \dots \\ &\quad \pm a_{m+2k} \cos(m+2k)x. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} 2 R'_m \cos x &= a_m \cos(m-1)x \\ &\quad + (a_m - a_{m+2}) \cos(m+1)x \\ &\quad - (a_{m+2} - a_{m+4}) \cos(m+3)x \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad \pm (a_{m+2k-2} - a_{m+2k}) \cos(m+2k-1)x \\ &\quad \pm a_{m+2k} \cos(m+2k+1)x; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut qu'en valeur absolue

$$\begin{aligned} |2 R'_m \cos x| &< a_m + (a_m - a_{m+2}) \\ &\quad + (a_{m+2} - a_{m+4}) + \dots + (a_{m+2k-2} - a_{m+2k}) + a_{m+2k}, \\ (8) \quad |R'_m| &< \frac{a_m}{\cos x} < \frac{1}{m \cos x} \end{aligned}$$

et de la même façon

$$(9) \quad |R_m| < \frac{1}{m \cos x}.$$

Cette dernière relation montre que la série S est convergente.

4. Cela étant, soit ϵ un nombre positif donné aussi petit qu'on voudra. Il faut montrer qu'il est possible de trouver un entier N tel que, pour

$$n \geq N,$$

on ait toujours

$$|S - S'| < \epsilon.$$

Il est bien entendu qu'on suppose que x a une valeur fixe comprise entre $\pm \frac{\pi}{2}$.

Voici comment on peut trouver ce nombre N. Décomposons d'abord d'une manière quelconque ε en deux parties également positives :

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

et prenons un nombre entier impair m tel que

$$m > \frac{2}{\varepsilon'' \cos x}.$$

En écrivant alors

$$S = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \dots \pm \frac{1}{m-2} \cos(m-2)x \pm R_m,$$

$$S' = a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + \dots \pm a_{m-2} \cos(m-2)x \pm R'_m,$$

on aura, d'après les limitations (8) et (9),

$$|R_m| < \frac{1}{2} \varepsilon'',$$

$$|R'_m| < \frac{1}{2} \varepsilon''.$$

D'autre part, en faisant croître indéfiniment l'entier n , l'expression

$$a_1 \cos x - a_3 \cos 3x + \dots \pm a_{m-2} \cos(m-2)x$$

tend vers

$$\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \dots \pm \frac{1}{m-2} \cos(m-2)x.$$

On peut donc déterminer un entier N tel que, pour

$$n \geq N,$$

la différence de ces deux expressions soit inférieure à ε' , et il est visible que, pour ces valeurs de n , on aura

$$|S - S'| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

La formule

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots$$

est ainsi démontrée rigoureusement; il faut supposer x compris entre $\pm \frac{\pi}{2}$.

5. On peut obtenir d'une façon analogue le développement

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x - \dots$$

On déterminera d'abord une expression

$$\Psi_n(x) = a_1 \sin 2x + a_2 \sin 4x + \dots + a_n \sin 2nx,$$

par la condition que le développement de $\Psi_n(x)$ soit de cette forme

$$\Psi_n(x) = x + k_n x^{2n+1} + k_{n+1} x^{2n+3} + \dots$$

On obtient immédiatement la valeur de $\Psi_n(x)$ en remarquant que

$$\Psi_n(x) \sim x$$

ne peut différer que par un facteur constant de

$$\int_0^x (\sin x)^{2n} dx,$$

et la suite du raisonnement est tout à fait semblable à ce que nous venons d'exposer en détail.

SUR LE PROBLÈME DE CLEBSCH (THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES, § 59 A 42);

PAR M. E. FONTANEAU.

1. L'équilibre d'élasticité des corps cylindriques a fait l'objet d'une étude spéciale, à raison de leur emploi