

ANDRADEZ

**Sur deux théorèmes curieux signalés
par M. Poincaré**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 435-440

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8_435_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX THÉORÈMES CURIEUX SIGNALÉS PAR M. POINCARÉ;

PAR M. ANDRADEZ.

Dans deux Notes des *Comptes rendus* (années 1887 et 1888), M. Poincaré a entrepris de démontrer l'existence des fonctions fondamentales sur lesquelles repose

la solution du problème du refroidissement d'un corps isotrope plongé dans un milieu indéfini ayant une température donnée, 0° si l'on veut.

A chacune de ces fonctions U se rattache un coefficient positif K , qu'on peut définir de la manière suivante :

F désignant une fonction de point définie à l'intérieur du corps, si l'on se donne l'intégrale de volume $\int F^2 d\tau$; par exemple, si l'on fait $\int F^2 d\tau = 1$, puis si l'on cherche le minimum de l'intégrale composée

$$(1) \quad h \int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

dont la première est étendue à la surface du corps et la seconde à son volume et dans laquelle h est la constante positive qui dépend du pouvoir émissif du corps et qui détermine le flux de chaleur à la surface de ce corps, on trouve immédiatement, par la règle d'Euler, que la fonction U_1 qui réalise ce minimum satisfait aux équations suivantes (notations ordinaires du potentiel)

$$\begin{cases} \Delta U_1 + K_1 U_1 = 0, & \text{en chaque point du volume,} \\ \frac{\partial U_1}{\partial n} + h U_1 = 0, & \text{en chaque point de la surface,} \end{cases}$$

et la constante K_1 est le minimum de l'intégrale composée étudiée.

Voici maintenant la loi de récurrence qui donne les fonctions des divers ordres $U_1, U_2, \dots, U_i$.

Les fonctions précédentes étant supposées formées, on envisage une fonction F assujettie aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} \int F^2 d\tau &= 1, & \int F U_1 d\tau &= 0, \\ \int F U_2 d\tau &= 0, & \dots, & \int F U_{i-1} d\tau = 0; \end{aligned}$$

la fonction F , pour laquelle l'intégrale composée (1)

sera minima, est la nouvelle fonction U_i qui vérifie encore les équations

$$\begin{cases} \Delta U_i + K_i U_i = 0, \\ \frac{\partial U_i}{\partial n} + h U_i = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles K_i désigne encore le minimum cherché.

Il résulte de là que les K_i vont en diminuant, quand leur ordre i croît. M. Poincaré a de plus démontré qu'ils décroissent indéfiniment.

Sa démonstration, fondée d'abord dans le cas d'un solide convexe et de $h = 0$, sur une transformation d'intégrale multiple et sur une nouvelle définition de K_2 , s'étend au cas d'un corps quelconque par une décomposition de ce corps en solides convexes, et le théorème, étant démontré pour $h = 0$, a lieu *a fortiori* dans le cas général.

Enfin, après avoir établi ce beau résultat, l'auteur énonce deux théorèmes *extrêmement curieux* : l'un pour servir au calcul d'une limite supérieure de K_n dans le cas général de h quelconque, l'autre pour servir au calcul d'une limite supérieure de K_2 , dans le cas de $h = 0$.

Voici des démonstrations fort simples de ces théorèmes :

THÉORÈME (sur une limite de K_n). — Soient n indéterminées $x_1, x_2, \dots, x_n$, et n fonctions arbitraires $F_1, F_2, \dots, F_n$, on pose

$$F = x_1 F_1 + \dots + x_n F_n,$$

puis

$$\begin{cases} B = \int F^2 d\tau, \\ A = h \int F^2 d\omega + \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau, \end{cases}$$

puis on considère la forme quadratique des x

$$A - \lambda B,$$

dont on égale le discriminant à zéro; si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les racines de ce discriminant rangées par ordre de grandeurs croissantes, on aura généralement

$$\lambda_i > k_i.$$

Démonstration. — Considérons la forme $A - \lambda B$ qui est définie positive pour $\lambda < \lambda_1$, qui a un carré soustractif pour $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, qui a deux carrés soustractifs pour $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3, \dots$; donnons à λ la valeur $\lambda_i + \varepsilon$, la forme $A - \lambda B$ sera décomposée ainsi en carrés indépendants

$$-P_1^2 - P_2^2 - \dots - P_i^2 + P_{i+1}^2 + P_{i+2}^2 + \dots + P_n^2.$$

Or, d'après une remarque bien connue sur les formes quadratiques, nous pourrions donner à la forme une valeur négative, tout en satisfaisant aux relations linéaires suivantes, au nombre de $i - 1$,

$$(2) \quad \begin{cases} \int F U_1 d\tau = 0, \\ \int F U_2 d\tau = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \int F U_i d\tau = 0. \end{cases}$$

On a donc, pour $\lambda = \lambda_i + \varepsilon$ et pour des valeurs convenables des α ,

$$A - (\lambda_i + \varepsilon)B < 0;$$

d'autre part, à cause des relations (2), on a, par la définition même de K_i ,

$$A - K_i B > 0.$$

On déduit de ces deux inégalités

$$\lambda_i + \varepsilon > K_i$$

et, par suite,

$$\lambda_i > K_i.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME (sur une limite de K_2 , quand $h = 0$). — Si l'on considère trois fonctions u, v, w , assujetties seu-

lement à la surface du corps à vérifier la relation

$$(3) \quad ux + v\beta + w\gamma = 0$$

(α, β, γ , cosinus directeurs de la normale à la surface),
on aura

$$(4) \quad \frac{\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 d\tau}{\int (u^2 + v^2 + w^2) d\tau} > K_2.$$

Démonstration. — Si nous nous donnons

$$f(u^2 + v^2 + w^2) d\tau = 1$$

et si nous égalons à zéro la variation de

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 d\tau,$$

en tenant compte de la relation (3), nous trouvons sans difficulté pour les fonctions u', v', w' , qui donnent le minimum de l'intégrale précédente, la condition

$$\int \left[\left(\frac{dS}{dx} + \lambda u' \right) \delta u' + \left(\frac{dS}{dy} + \lambda v' \right) \delta v' + \left(\frac{dS}{dz} + \lambda w' \right) \delta w' \right] d\tau = 0,$$

après avoir posé $S = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}$, c'est-à-dire

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dS}{dx} + \lambda u' = 0, \\ \frac{dS}{dy} + \lambda v' = 0, \\ \frac{dS}{dz} + \lambda w' = 0, \end{cases}$$

λ étant une constante, ce qui montre que S satisfait aux équations

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta S + \lambda S = 0, & \text{à l'intérieur du corps,} \\ \frac{dS}{dn} = 0, & \text{à la surface du corps,} \end{cases}$$

et alors, dans ce cas du minimum, le numérateur du premier membre de (4) est précisément λ .

En tenant compte des relations (5) et (6), on peut encore dire qu'on aura

$$(7) \quad \int \left[\left(\frac{dS}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dS}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dS}{dz} \right)^2 \right] d\tau = \lambda^2.$$

pendant que

$$(8) \quad \int S^2 d\tau = \lambda,$$

et pendant qu'en même temps $\int S d\tau = 0$. Cette dernière se déduit du théorème de Green et de

$$\int \Delta S d\tau = 0, \quad \frac{dS}{dn} = 0.$$

On déduit alors de (7) et (8) et de la définition de K_2

$$\lambda \geq K_2,$$

λ étant le minimum du premier membre de (4). L'inégalité (4) en résulte donc *a fortiori*. C. Q. F. D.