

LEMAIRE

## **Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1888**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 8  
(1889), p. 391-400

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1889\\_3\\_8\\_\\_391\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__391_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION  
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888 ;**

PAR M. LEMAIRE,  
Professeur au lycée de Lorient.

---

*On donne un quadrilatère plan  $OACB$  et deux séries de paraboles : les unes tangentes en  $A$  à  $AC$  et ayant pour diamètre  $OA$  ; les autres tangentes en  $B$  à  $BC$  et ayant pour diamètre  $OB$ .*

*On demande :*

*1° De trouver le lieu du point de contact  $M$  d'une*

parabole de la première série avec une parabole de la deuxième série ;

2° D'indiquer, en laissant le triangle OAB invariable, dans quelle région du plan il faut placer le point C pour que le lieu soit une ellipse ou une hyperbole ;

3° De démontrer, dans l'hypothèse où OACB est un parallélogramme, que la tangente commune en M aux deux paraboles pivote autour du point de concours K des médianes du triangle ABC ;

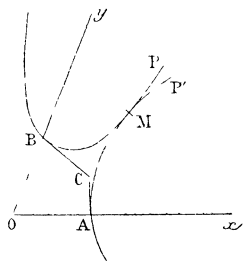
4° De trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection P de la tangente en M aux deux paraboles avec l'autre tangente commune DE que l'on peut mener à ces deux courbes.

N. B. — On représentera la longueur OA par  $a$ , et la longueur OB par  $b$ .

#### SOLUTION ANALYTIQUE.

I. Prenons pour axes de coordonnées OA et OB ; soient  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(p, q)$  les coordonnées de A, B, C ;

Fig. 1.



$x_0, y_0$  celles d'un point du lieu (fig. 1). Les paraboles P de la première série ont une équation de la forme

$$y^2 - 2P[y(p - a) - q(x - a)] = 0.$$

De même, l'équation générale des paraboles  $P'$  de la seconde série est

$$x^2 - 2P'[x(q-b) - p(y-b)] = 0.$$

Le point  $M$  du lieu appartenant à la fois aux deux paraboles, on a

$$y_0^2 - 2P[y_0(p-a) - q(x_0-a)] = 0,$$

$$x_0^2 - 2P'[x_0(q-b) - p(y_0-b)] = 0.$$

Écrivons que les tangentes en  $M$  aux deux courbes sont confondues, nous aurons

$$\frac{Pq}{x_0 - P'(q-b)} = \frac{y_0 - P(p-a)}{P'p}.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira d'éliminer les paramètres  $P$  et  $P'$  entre les trois relations précédentes, ce qui n'offre aucune difficulté puisque les deux premières sont du premier degré par rapport à ces paramètres. On trouve ainsi, en supprimant les indices,

$$(1) \quad \begin{cases} 2q(q-b)x^2 + 2p(p-a)y^2 \\ - [3pq + (p-a)(q-b)]xy \\ + 2q[a(b-q) + 2pb]x \\ + 2p[b(a-p) + 2qa]y - 4pqab = 0. \end{cases}$$

Cette équation représente une conique passant par les points  $A'$  et  $B'$ , par le symétrique  $C'$  de  $O$  par rapport à  $C$ , et enfin par les points de rencontre de  $C'A'$  avec  $Oy$  et de  $C'B'$  avec  $Ox$ ,  $C'A'$  et  $C'B'$  étant les parallèles à  $CA$  et à  $CB$ , menées par le point  $C'$ .

II. Cette conique sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que nous aurons

$$[3pq + (p-a)(q-b)]^2 - 16pq(p-a)(q-b) \leq 0,$$

inégalité qu'on peut facilement mettre sous la forme

$$(2) \quad |(p-a)(q-b) - 9pq| - aq - bq + ab \geq 0.$$

Cela posé, construisons la droite ayant pour équation

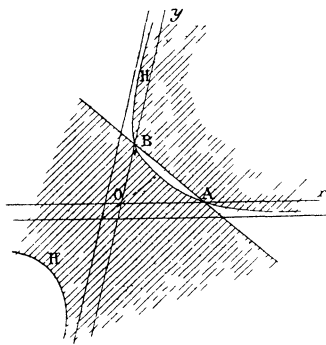
$$(AB) \quad -ay - bx - ab = 0.$$

et l'hyperbole représentée par

$$(H) \quad (x-a)(y-b) - 9xy = 0.$$

La droite n'est autre que AB. L'hyperbole passe en A et B, a pour centre le point  $(-\frac{a}{8}, -\frac{b}{8})$  et ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées (fig. 2).

Fig. 2.



On reconnaît aisément que pour tous les points situés dans les parties du plan couvertes de hachures, le premier membre de (2) est positif, et, par suite, (1) représente une hyperbole. Si C est dans les autres parties du plan, l'équation représente une ellipse.

Dans le cas particulier où C est un point de H ou de AB, la conique (1) est une parabole.

III. Si OABC est un parallélogramme, on a

$$p = a \quad \text{et} \quad q = b.$$

Les équations générales des paraboles deviennent, dans cette hypothèse,

$$\begin{aligned} y^2 + 2Pb(x - a) &= 0, \\ x^2 + 2P'a(y - b) &= 0. \end{aligned}$$

La tangente en M a pour équation

$$y - y_0 = - \frac{Pb}{y_0} (x - x_0),$$

avec les conditions

$$(3) \quad y_0^2 + 2Pb(x_0 - a) = 0,$$

$$(4) \quad x_0^2 + 2P'a(y_0 - b) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{Pb}{y_0} = \frac{x_0}{P'a},$$

de sorte que l'équation de la tangente s'écrit

$$(y - y_0) = \frac{y_0}{2(x_0 - a)} (x - x_0).$$

La relation qui exprime que cette droite passe par le centre de gravité K de ABC, dont les coordonnées sont  $\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}$ , est

$$2(x_0 - a) \left( \frac{2b}{3} - y_0 \right) - y_0 \left( \frac{2a}{3} - x_0 \right) = 0$$

ou

$$-3x_0y_0 + 4(bx_0 + ay_0 - ab) = 0.$$

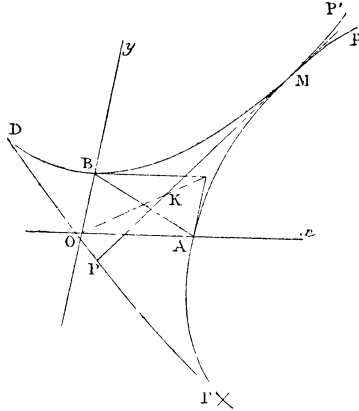
Or, en tenant compte de (3) et (4), on peut mettre (5) sous la forme

$$\frac{y_0}{2(x_0 - a)} = \frac{2(y_0 - b)}{x_0};$$

C'est précisément la relation demandée.

IV. Pour résoudre la quatrième partie, prenons pour paramètre le coefficient angulaire de la tangente commune en M (*fig. 3*).

Fig. 3.



Comme cette droite pivote autour du point K, son équation est de la forme

$$(MT) \quad 3y - 2b = m(3x - 2a).$$

Cherchons les conditions pour que l'équation

$$(6) \quad y = \mu x + \nu$$

représente la seconde tangente commune aux deux paraboles correspondant à une direction donnée  $m$  de MT.

L'équation aux abscisses des points communs à la droite (6) et à la parabole P est

$$(\mu x + \nu)^2 + 2Pb(x - a) = 0,$$

d'où la condition de tangence

$$(7) \quad 2\mu\nu + Pb + 2a\mu^2 = 0.$$

Nous trouverons de même la condition suivante de contact de la droite (6) et de la parabole (P')

$$(8) \quad P' a \mu^2 - 2(\nu - b) = 0.$$

Éliminant  $\nu$  entre les relations (7) et (8), on trouve

$$P' a \mu^3 + 2 a \mu^2 + 2 b \mu + P b = 0,$$

qui est l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes aux deux paraboles. Cette équation doit admettre la valeur  $m$  pour racine double, d'où les relations

$$\begin{aligned} \mu + 2m &= -\frac{2}{P'}, \\ 2\mu m + m^2 &= -\frac{2b}{P'a}, \\ \mu m^2 &= -\frac{Pb}{P'a}. \end{aligned}$$

Éliminant  $P$  et  $P'$ , nous obtenons facilement

$$\mu = -\frac{m(2b + am)}{b + 2am}.$$

La valeur correspondante de  $\nu$  est donnée par l'équation (8), par exemple. On trouve

$$\nu = -\frac{(am - b)^2}{3(2am + b)},$$

de sorte qu'enfin,  $m$  étant le coefficient angulaire de la tangente commune en  $M$ , l'autre tangente commune a pour équation

$$y = -\frac{m(2b + am)}{b + 2am}x - \frac{(am - b)^2}{3(2am + b)}$$

ou

$$(DE) \quad 3(2am + b)y + 3m(2b + am)x + (am - b)^2 = 0.$$





