

CL. SERVAIS

Sur les cubiques nodales circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 197-203

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__197_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__197_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES ;

PAR M. CH. SERVAIS,

Repetiteur à l'Université de Gand

I

1. Considérons deux cercles ω et O se coupant aux points A et B ; par le point A menons une sécante rencontrant les deux cercles respectivement aux points A'

($A\omega$), AC est parallèle à l'asymptote. On peut donc énoncer la propriété suivante :

Au point double A d'une cubique circulaire, on décrit un cercle tangent à chacune des branches de la courbe; l'un ω a pour rayon le diamètre $A\omega$ du cercle osculateur et rencontre la cubique au point B ; l'autre O passant par B rencontre le cercle osculateur ($A\omega$) en un point C tel que AC est parallèle à l'asymptote. Une sécante issue du point double rencontre les cercles ω et O et la cubique, respectivement en des points A' , M' , M tels que $(AA'MM') = -1$.

2. Soient A_1, N', N les points d'intersection de la droite $A\omega$ avec les deux cercles et la cubique. On a

$$(a) \quad \frac{1}{A_1 A} = \frac{1}{A_1 N'} - \frac{1}{A_1 N}.$$

Si les tangentes aux points A_1 et N' aux cercles ω et O se coupent au point T , TN est la tangente à la cubique au point N . Appelons ψ l'angle TNA , φ le complément de l'angle $T_1 A T_2$, 2φ le diamètre $A\omega$, N la corde normale AN ; on aura

$$A_1 N' = -A_1 T \cot \varphi = -A_1 N \frac{\tan \psi}{\tan \varphi};$$

par conséquent, l'égalité (a) devient

$$-\frac{1}{4\varphi} = -\frac{1}{N - 4\varphi} \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \psi} - 1 \right).$$

On déduit de là

$$(1) \quad \frac{2\varphi}{N} = \frac{\tan \psi}{\tan \varphi + \tan \psi}.$$

3. La conique transformée de la droite $N'T$ est tangente à la cubique aux points A et N ; elle a pour cercle

osculateur le cercle ($A\omega$) et sa corde de courbure est parallèle à $N'T$. Or les deux droites AT_2 et $N'T$ sont également inclinées sur AN ; donc :

La conique tangente à une cubique circulaire aux extrémités de la corde normale AN au point double A , et qui a au point A même cercle osculateur que la cubique, a pour corde de courbure au point A la droite symétrique de la seconde tangente au point double par rapport à la première.

Ceci nous montre que la formule (1) est applicable aux coniques, si φ représente l'angle de la normale et de la corde de courbure.

4. On a

$$\frac{1}{AN'} = \frac{1}{AM'} + \frac{1}{AM},$$

$$\frac{AN'}{AM'} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \gamma)},$$

si γ représente l'angle MAN ; donc

$$\frac{1}{2\rho \cos \gamma} = \frac{1}{AN'} \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \gamma)} + \frac{1}{AM};$$

mais

$$\frac{2}{4\rho} = \frac{1}{AN'} + \frac{1}{N},$$

par conséquent

$$(\gamma) \quad \frac{1}{AM} \frac{\sin(\varphi + \gamma)}{\cos \varphi} = \frac{\tan \gamma}{2\rho} + \frac{\tan \varphi}{N}.$$

Conséquences. — En prenant pour sécante la droite AC , on obtient

$$\frac{2\rho}{N} = \frac{\tan \gamma_1}{\tan \varphi},$$

γ_1 étant l'angle de l'asymptote et de la normale AN. On peut interpréter géométriquement cette formule et arriver à la construction du cercle de courbure au point A de la cubique. Élevons aux points ω et N des perpendiculaires à la droite AN rencontrant respectivement AT_2 et AC aux points S et K; on aura

$$\omega S = \Lambda \omega \tan \varphi = N \tan \gamma_1 = NK;$$

donc :

Les parallèles menées par les extrémités ω et N du diamètre du cercle osculateur et de la corde normale au point double A à la tangente AT_1 et limitées respectivement à la tangente AT_2 et à la parallèle AC à l'asymptote, sont égales.

Les sécantes AB et AO donnent les formules

$$\frac{\sin \varphi \cos \gamma_2}{N} = \frac{\sin(\varphi - \gamma_2)}{4\rho}$$

et

$$\frac{\cos^2 \varphi}{2\rho} + \frac{\sin^2 \varphi}{N} = \frac{\sin \varphi}{N_1},$$

si l'on représente l'angle BAN par γ_2 et la seconde corde normale ΛN_1 par N_1 . Il suffit de remarquer que

$$AB = 4\rho \cos \gamma_2$$

et que, pour la sécante ΛN_1 ,

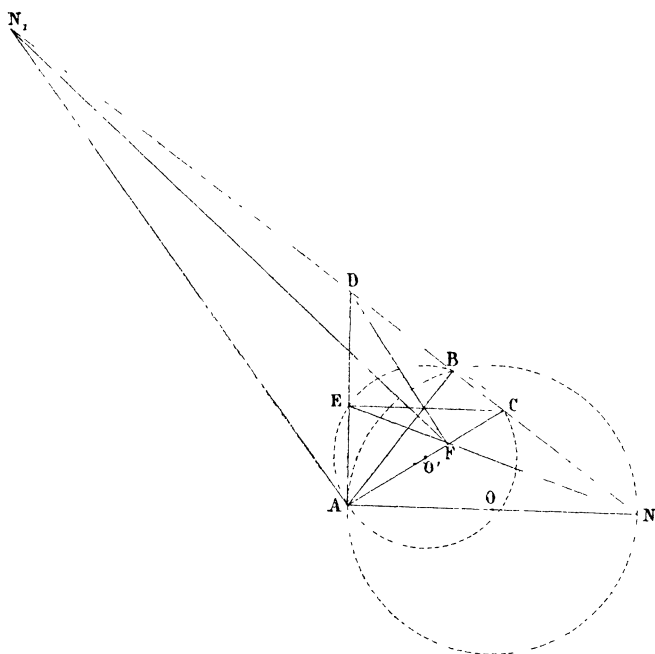
$$\gamma_2 = 90^\circ - \varphi.$$

II.

1. Considérons deux cercles O et O' passant par les points A et B et le diamètre AN du premier cercle; soit M' un point quelconque de O' : la perpendiculaire

élevée au point A sur AM' rencontre NM' en un point M dont le lieu est une cubique nodale circulaire. Les tangentes au point double A sont la tangente AD au cercle O

Fig. 2.



et la droite AO' ; la normale AN_1 à AO' rencontre la cubique au point N_1 correspondant à l'extrémité C du diamètre AO' ; donc les quatre points N, C, B, N_1 sont en ligne droite; mais NB est parallèle à l'asymptote réelle de la cubique; par conséquent :

Dans une cubique nodale circulaire, la droite qui joint les extrémités des normales au point double est parallèle à l'asymptote.

2. Soit E le point d'intersection de AD avec le cercle O'; en cherchant le point infiniment voisin du point N sur la cubique, on voit que la tangente en ce point est la droite NE; mais EC est perpendiculaire sur AD; donc :

Les tangentes aux extrémités N et N₁ des normales au point double A d'une cubique circulaire rencontrent les côtés opposés du triangle formé par les tangentes au point A et la droite NN₁ aux pieds des hauteurs.

3. Si le cercle O' est tangent en A au diamètre AN, les tangentes au point double coïncident et l'on a une cubique cuspidale; donc :

La tangente à l'extrémité de la normale au point de rebroussement d'une cubique circulaire est parallèle à l'asymptote.

4. Si l'on transforme par l'inversion le théorème I de notre Note *Sur la courbure dans les coniques* (Nouvelles Annales, août 1888), on obtient le théorème suivant :

Par le point double d'une cubique nodale circulaire, on mène une sécante rencontrant aux points M et m la cubique et la parallèle menée à l'asymptote par le milieu de la distance du point double à cette droite. La symétrique M₁ du point M par rapport au point m décrit un cercle, ayant son centre sur la perpendiculaire au point A à la droite qui joint ce point au tangentiel du point réel à l'infini de la cubique.
