

LUCIEN LÉVY

Démonstration d'une formule relative à la capillarité

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 8
(1889), p. 111-115

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__111_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1889_3_8__111_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE RELATIVE
A LA CAPILLARITÉ;**

PAR M. LUCIEN LÉVY.

L'ouvrage classique de MM. Jamin et Bouty contient, pour établir la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) F,$$

une démonstration dont le principe est dû à M. Lippmann, mais qui est incorrecte dans les termes où elle est présentée. La Note qui suit a pour objet de rectifier cette démonstration.

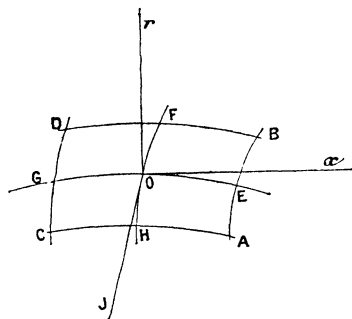
Nous admettons sans discussion l'hypothèse de M. Lippmann. La surface du liquide peut être assimilée à une pel-

licule sans épaisseur, extensible et compressible le long de la surface liquide; découpons fictivement un élément de surface par une ligne fermée : cet élément tendra à se contracter comme une membrane de caoutchouc et, pour le maintenir en équilibre, il faudra appliquer certaines forces tout le long du contour. On admet que la force appliquée à un élément de ligne est, dans le plan tangent à la surface, normale à cet élément et proportionnelle à la longueur ds de cet élément. Elle peut donc être représentée par une expression de la forme

$$F ds,$$

F étant un coefficient constant.

Cela posé, étudions les conditions d'équilibre d'un rectangle élémentaire tracé sur la surface. Ce rectangle ne sera pas quelconque comme l'indique la démonstration citée; voici comment nous le déterminerons. Par



un point O de la surface, menons deux lignes de courbure GOE , FOH . Sur la première prenons, à partir du point O , deux longueurs égales OE , OG infiniment petites : en E et en G passent deux lignes de courbure du second système AB , CD . De même, sur la seconde ligne, prenons à partir du point O deux longueurs égales

OF, OH infiniment petites : en F et en H passent deux lignes de courbure du premier système BD, AC. Les quatre lignes AB, BD, DC, CA se coupent à angle droit et limitent un rectangle infiniment petit : nous considérerons ce rectangle comme l'élément de surface dont il a été question. Il est soumis aux tensions superficielles, normales aux quatre côtés, à la pression extérieure normale à la surface, et à la pression intérieure également normale à la surface. Ces dernières pressions sont proportionnelles à l'élément de surface.

Pour établir l'équation d'équilibre, nous prendrons comme axes la normale Oz à la surface au point O et les tangentes Ox , Oy aux deux lignes de courbure.

Soient p la pression extérieure au point O, comptée de z vers O, $p + \Delta p$ la pression intérieure, évaluée dans le sens contraire; la pression extérieure sur l'élément ABCD sera

$$pAB.AC;$$

la pression intérieure sur le même élément,

$$-(p + \Delta p) AB.AC.$$

La résultante de ces deux forces, dirigée comme elles suivant Oz , sera

$$-\Delta p.AB.AC.$$

Pour que l'élément, considéré comme solide, reste en équilibre, il est nécessaire que la somme des projections sur Oz des tensions superficielles et de la résultante précédente soit égale à zéro.

Evaluons ces projections.

La tension normale à AB a pour expression

$$F \times AB.$$

Or, en vertu d'un théorème connu sur le déplacement

d'un élément de ligne, AB et FH ne diffèrent que par un infiniment petit du second ordre, et, comme nous aurons à projeter sur Oz, qui est à peu près perpendiculaire sur la direction de cette force, nous négligeons seulement des infiniment petits du troisième ordre, en adoptant pour expression de la tension normale

$$F \times FH.$$

La direction de cette force, qui est tangente en E à la ligne de courbure GOE, fait avec Oz un angle α dont le cosinus a pour valeur principale $\frac{dz}{dx}$. La projection a donc pour expression

$$F \times FH \times \cos \alpha = F \times FH \times \frac{dz}{dx}.$$

La tension normale à CD en G donne aussi

$$F \times FH \times \frac{dz}{dx}.$$

De même les tensions normales à AC et à BD ont pour projections chacune

$$F \times GE \frac{dz}{dy}.$$

L'équation d'équilibre est donc

$$-\Delta p \cdot AB \cdot AC + 2F \times FH \frac{dz}{dx} + 2F \times GE \frac{dz}{dy} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(1) \quad -\Delta p \cdot FH \cdot GE + 2F \times FH \frac{dz}{dx} + 2F \cdot GE \frac{dz}{dy} = 0.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer FH, GE, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Or, avec les axes choisis, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont nuls à l'origine, ainsi que $\frac{d^2z}{dx^2}$: l'équation de la surface peut donc s'écrire, en sup-

posant seulement que dans le voisinage de l'origine z puisse être développée en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x et de y ,

$$z = ax^2 + by^2 + \dots,$$

les termes négligés étant du troisième ordre.

Donc

$$\frac{dz}{dx} = 2ax,$$

$$\frac{dz}{dy} = 2by,$$

en s'en tenant aux termes du premier ordre.

D'autre part,

$$FH = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et, comme x et z sont infiniment petits par rapport à y ,

$$FH = 2\sqrt{y^2} = 2y.$$

De même,

$$GE = 2x.$$

L'équation devient ainsi

$$-\Delta p \cdot 4xy + 2F \cdot 2y \cdot 2ax + 2F \cdot 2x \cdot 2by = 0$$

ou, en simplifiant,

$$-\Delta p + F \cdot (2a + 2c) = 0.$$

Si l'on appelle R et R' les rayons de courbure principaux au point O , comme

$$2a = \frac{1}{R},$$

$$2c = \frac{1}{R'},$$

on obtient la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) F.$$
