

WORONTZOFF

Sur un théorème de M. Weill

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 97-99

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__97_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THEOREME DE M. WEILL;

PAR M. WORONTZOFF, à Minsk (Russie).

En se fondant sur la théorie de la décomposition des
fractions rationnelles en fractions partielles, M. Weill

Ann. de Mathémat., 3^e série, t. VII (Février 1888). 7

donne le théorème suivant :

$$C_h^1 - 3 C_h^3 + 3^2 C_h^5 - \dots = \pm 2^{h-1},$$

où C_h^n représente le nombre des combinaisons de h objets n à n et $h = 3m + 1, 3m + 2$ (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1887, p. 83). Cette formule curieuse peut être établie facilement par les procédés d'Algèbre élémentaire.

En effet, comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^3 &= 1, & \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{3m} &= 1, \\ \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3m+1} &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, & \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3m+2} &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3m} &= \frac{(-1)^{3m}}{2^{3m}} [1 - i\sqrt{3} C_{3m}^1 - 3 C_{3m}^3 \\ &\quad - i(\sqrt{3})^3 C_{3m}^5 + 3^2 C_{3m}^7 - i(\sqrt{3})^9 C_{3m}^9 - \dots], \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} &= \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{3m+1} \\ &= \frac{(-1)^{3m+1}}{2^{3m+1}} [1 - i\sqrt{3} C_{3m+1}^1 - 3 C_{3m+1}^3 \\ &\quad + i(\sqrt{3})^3 C_{3m+1}^5 \\ &\quad + 3^2 C_{3m+1}^7 - i(\sqrt{3})^9 C_{3m+1}^9 - \dots], \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} &= \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{3m+2} \\ &= \frac{(-1)^{3m+2}}{2^{3m+2}} [1 - i\sqrt{3} C_{3m+2}^1 - 3 C_{3m+2}^3 \\ &\quad - i(\sqrt{3})^3 C_{3m+2}^5 + 3^2 C_{3m+2}^7 \\ &\quad - i(\sqrt{3})^9 C_{3m+2}^9 - \dots] \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
 1 - 3 C_{3m}^2 + 3^2 C_{3m}^4 - \dots &= (-2)^{3m}, \\
 1 - 3 C_{3m+1}^2 + 3^2 C_{3m+1}^4 - \dots &= (-2)^{3m}, \\
 1 - 3 C_{3m+2}^2 + 3^2 C_{3m+2}^4 - \dots &= (-2)^{3m+1}, \\
 C_{3m}^1 - 3 C_{3m}^3 + 3^2 C_{3m}^5 - \dots &= 0, \\
 C_{3m+1}^1 - 3 C_{3m+1}^3 + 3^2 C_{3m+1}^5 - \dots &= (-2)^{3m}, \\
 C_{3m+2}^1 - 3 C_{3m+2}^3 + 3^2 C_{3m+2}^5 - \dots &= (-1)^{3m} 2^{3m+1}.
 \end{aligned}$$

Toutes ces égalités peuvent aussi s'obtenir au moyen des formules trigonométriques bien connues

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{2k\pi}{p} &= \cos^n \frac{2\pi}{p} - C_n^2 \sin^2 \frac{2\pi}{p} \cos^{n-2} \frac{2\pi}{p} \\
 &\quad + C_n^4 \sin^4 \frac{2\pi}{p} \cos^{n-4} \frac{2\pi}{p} - \dots, \\
 \sin \frac{2k\pi}{p} &= C_n^1 \sin \frac{2\pi}{p} \cos^{n-1} \frac{2\pi}{p} - C_n^3 \sin^3 \frac{2\pi}{p} \cos^{n-3} \frac{2\pi}{p} \\
 &\quad + C_n^5 \sin^5 \frac{2\pi}{p} \cos^{n-5} \frac{2\pi}{p} - \dots,
 \end{aligned}$$

où $n = pm + k$.