

Solutions de la question 1572

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 442-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__442_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE LA QUESTION 1572;

TP et TQ sont des tangentes à une parabole de foyer S; la droite TS rencontre le cercle TPQ en un point L; prouver, par la Géométrie pure, que $TS = SL$.
(R.-W. GENÈSE.)

1. Solution de M. d'Ocagne.

Considérons les cercles tangents en T, l'un à TP, l'autre à TQ, et passant respectivement par les points Q et P. En appelant S le point où se coupent ces deux

cercles, j'ai démontré dans une de mes Notes sur la symmédiane (*Nouvelles Annales*, p. 366; 1885) que la droite TS, symmédiane du triangle TPQ, coupe le cercle circonscrit à ce triangle en un point L, tel que $TS = SL$. Il suffit donc, pour que la proposition précédente soit démontrée, de faire voir que le point S est le foyer de la parabole tangente respectivement en P et en Q à TP et à TQ. A cet effet, tirons la médiane TM du triangle TPQ; c'est un diamètre de la parabole. D'ailleurs, on a $\widehat{QTM} = \widehat{STP}$; c'est la définition même de la symmédiane. Mais, dans le cercle TSQ, on voit que les angles STP et SQT sont égaux comme ayant même mesure. Donc $\widehat{QTM} = \widehat{SQT}$. De même $\widehat{PTM} = \widehat{SPT}$. Le point S est donc bien le foyer de la parabole.

2. Solution de M. Ignacio Beyens,

Capitaine du Génie à Cadix.

Soient

SX l'axe de la parabole;

PP', QQ' des parallèles à l'axe;

p, q les milieux de TP, TQ.

D'après les propriétés bien connues de la parabole, on aura

$$\text{angle TPS} = \text{HPP}' = \text{HTT}' = \text{STQ}$$

et

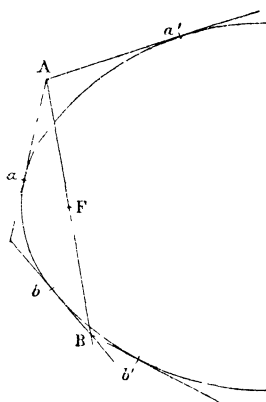
$$\text{angle STP} = \text{T'TQ} = \text{Q'QK} = \text{SQT}.$$

Donc les triangles $STP \equiv STQ$ sont semblables et les médianes Sp, Sq divisent ces triangles en deux autres aussi semblables, et, par suite, nous aurons

$$pSq = pST + TSq = qSQ + pSP;$$

Étant donnée une parabole, si l'on prend deux points A et B (fig. 1) symétriques par rapport au

Fig. 1.



foyer F , ces deux points, ainsi que les quatre points de contact des tangentes menées de A et de B à la parabole, sont sur un même cercle.

Je transforme toute la figure par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre F et de rayon arbitraire. Il suffit alors de démontrer le théorème suivant :

Étant donné un cercle ω , un point F dessus et deux droites (α) et (β) parallèles, équidistantes de F , ces deux droites, ainsi que les quatre tangentes au cercle aux quatre points où (α) et (β) le rencontrent, sont tangentes à une même conique de foyer F .

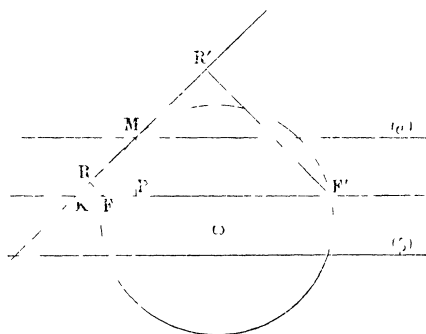
Menons par F (fig. 2) la parallèle à (α) et (β) : elle détermine sur ω un second point F' . Abaissons de M la perpendiculaire MP sur FF' , puis projetons F et F' en R et R' sur la tangente en M .

Je dis que

$$\overline{FR} \cdot \overline{F'R'} = \overline{MP}^2.$$

Soit K le point d'intersection de RR' et de FF' .

Fig. 2.



Les triangles semblables

$$\begin{cases} \triangle KRF, & \triangle KR'I, \\ \triangle KPM, & \triangle KPM \end{cases}$$

donnent

$$\frac{FR}{MP} = \frac{KF}{KM}, \quad \frac{F'R'}{MP} = \frac{KF}{KM}.$$

Multipliant membre à membre, j'obtiens

$$\overline{FR} \cdot \overline{F'R'} = \overline{MP}^2.$$

En considérant la tangente en N , on aurait un résultat analogue.

Donc les droites (α) et (β) , les tangentes en M et en N et, par raison de symétrie, les tangentes en M' et en N' enveloppent une conique de foyers F et F' .

Le théorème se trouve donc démontré.

On en déduit immédiatement quelques conséquences intéressantes.

Ainsi, considérons une ellipse fixe et tous les cercles qui passent par les deux foyers F et F' .

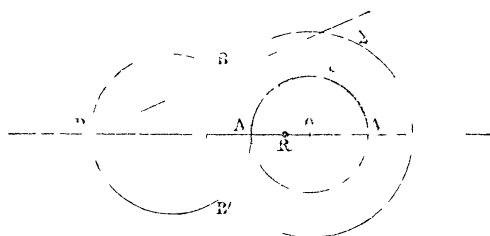
Menons les tangentes communes à l'ellipse et à un des cercles de la série. Les points de contact de ces tangentes avec le cercle sont sur les tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.

Ce théorème faisait partie du problème posé en 1885 aux candidats à l'Ecole Polytechnique.

On peut en déduire le théorème suivant :

Soient Σ et S deux cercles concentriques de rayons a et c ($a > c$) et un diamètre fixe OP . Prenons sur ce diamètre un point variable P et décrivons sur PA

Fig. 3



comme diamètre un cercle qui coupe le cercle Σ en B et B' . Joignons PB et prenons le point R conjugué harmonique de P par rapport à A et A' . La distance de R à la droite PB est constante et égale à $\sqrt{a^2 - c^2}$.