

ÉTIENNE POMEY

Sur l'intégration de l'équation différentielle des coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 7
(1888), p. 194-196

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__194_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY.

L'équation différentielle des coniques, rapportées à deux axes de coordonnées rectangulaires et ayant pour foyers F et F' situés sur Ox de part et d'autre de l'origine à la distance c de ce point, est

$$(1) \quad xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (x^2 - y^2 - c^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Pour intégrer cette équation, M. Jordan (*Cours d'Analyse*, t. III, p. 40) la ramène à une équation de Clairaut par la substitution $x^2 = u$, $y^2 = v$. Mais on peut aussi l'intégrer directement par la méthode suivante, qui repose sur quelques transformations simples qu'on peut lui faire subir, de façon à la ramener à la forme $du + dv = 0$, d'où résulte la solution $u + v = \text{const.}$

L'équation (1) peut, en effet, s'écrire successivement

$$(2) \quad xy \, dy^2 + x^2 \, dx \, dy - y^2 \, dx \, dy - c^2 \, dx \, dy - xy \, dx^2 = 0,$$

$$(3) \quad x \, dy(y \, dy + x \, dx) - y \, dx(y \, dy + x \, dx) = c^2 \, dx \, dy,$$

$$(4) \quad (x \, dy - y \, dx)(y \, dy + x \, dx) = c^2 \, dx \, dy.$$

On voit donc que, si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} x \, dy - y \, dx &= m, & y \, dy + x \, dx &= n, \\ c \, dx &= p, & c \, dy &= q. \end{aligned}$$

L'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{m}{q} = \frac{p}{n},$$

d'où l'on tire

$$(5) \quad \frac{m+q}{m-q} = \frac{p+n}{p-n} = \pm \frac{\sqrt{(m+q)^2 + (p+n)^2}}{\sqrt{(m-q)^2 + (p-n)^2}}.$$

Or on a

$$(m+q)^2 + (p+n)^2 = [(x+c)^2 + y^2](dx^2 + dy^2),$$

$$(m-q)^2 + (p-n)^2 = [(x-c)^2 + y^2](dx^2 + dy^2),$$

$$p+n = (x+c) \, dx + y \, dy,$$

$$p-n = (x-c) \, dx + y \, dy,$$

et par suite, d'après (5),

$$\frac{(x-c) \, dx + y \, dy}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \pm \frac{(x-c) \, dx + y \, dy}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = 0$$

(196)

Chacune des deux fractions figurant dans cette équation est la demi-différentielle de son dénominateur. On a donc, en intégrant et désignant par a une constante arbitraire,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

équation qui représente toutes les ellipses et hyperboles ayant pour foyers les points F et F'.