NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 9-18

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__9_1>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

Par M. Ch. BIEHLER.

1. Si l'on pose

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

la dérivée d'ordre n de y par rapport à α est une expression de la forme

$$\frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

où $Q_n(x, \alpha)$ est un polynôme de degré n en x et de degré n en α.

Je vais mettre en évidence quelques propriétés du polynôme $Q_n(x, \alpha)$, et je supposerai, dans ce qui va suivre, que x ait reçu des valeurs telles que le trinôme $1 - 2\alpha x + \alpha^2$ ait ses zéros imaginaires, c'est-à-dire que x soit compris entre -1 et $+1$.

De l'égalité

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}},$$

on tire

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} \times \frac{x - \alpha}{1 - 2\alpha x + \alpha^2}$$

ou bien

$$y'(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + y(\alpha - x) = 0.$$

En dérivant n fois les deux membres par rapport à α, il viendra

$$y^{(n+1)}(1 - 2\alpha x + \alpha^2) + (2n + 1)y^{(n)}(\alpha - x) + n^2 y^{(n-1)} = 0.$$

En remplaçant $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ par leurs valeurs exprimées en fonction des polynômes de la forme $Q_n(x, \alpha)$, on aura

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &Q_{n+1}(x, \alpha) + (2n + 1)(\alpha - x)Q_n(x, \alpha) \\ &\qquad + n^2(1 - 2\alpha x + \alpha^2)\,Q_{n-1}(x, \alpha) = 0. \end{aligned} \right.$$

En différentiant l'équation

$$y^{(n)} = \frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

par rapport à α, on obtiendra la relation suivante

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & Q_{n+1}(x, \alpha) + (2n+1)(\alpha - x) Q_n(x, \alpha) \\ & \qquad - (1 - 2\alpha x + \alpha^2) Q'_n(x, \alpha) = 0; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, en comparant les égalités (a) et (b),

$$(c)\qquad Q'_n(x, \alpha) = -n^2 Q_{n-1}(x, \alpha).$$

Enfin, au moyen des égalités (b) et (c), on peut obtenir l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme $Q_n(x, \alpha)$. Il suffit pour cela de différentier par rapport à α l'équation (b) et de remplacer dans le résultat

$$Q'_{n+1}(x, \alpha) \quad \text{par} \quad -(n+1)^2 Q_n(x, \alpha),$$

qui sont identiques d'après la relation (c).

On obtient ainsi l'équation

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} & Q''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \\ & \quad -(2n-1)(\alpha - x) Q'_n(x, \alpha) + n^2 Q_n(x, \alpha) = 0. \end{aligned}\right.$$

2. Les relations (a), (c), (d) vont nous permettre de démontrer que l'équation

$$Q_n(x, \alpha) = 0$$

de degré n en α a toutes ses racines réelles, pourvu que x soit compris entre -1 et $+1$.

La relation (a) est en effet le type de la série des égalités

$$Q_n(x, \alpha) + (2n-1)(\alpha - x) Q_{n-1}(x, \alpha) + (n-1)^2 Q_{n-2}(x, \alpha) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Q_2(x, \alpha) + 3(\alpha - x) Q_1(x, \alpha) + Q_0 = 0,$$

qui montrent que le théorème de Sturm est applicable à l'équation

$$Q_n(x, \alpha) = 0.$$

La relation (a) montre en outre que les coefficients des plus hautes puissances de α dans les fonctions

$$Q_n(x, \alpha),\quad Q_{n-1}(x, \alpha),\quad \ldots,\quad Q_0$$

ont des signes alternés. Il s'ensuit que, pour $\alpha = -\infty$, la suite

$$Q_n(x, \alpha),\quad Q_{n-1}(x, \alpha),\quad \ldots,\quad Q_0$$

ne présente que des permanences et que, pour $\alpha = +\infty$, elle ne présente que des variations; la suite gagne n variations quand α croît de $-\infty$ à $+\infty$; par suite, toutes les racines de l'équation

$$Q_n(x, \alpha) = 0,$$

considérée comme une équation en α, sont réelles.

Le théorème de Sturm peut être appliqué aussi à la série des fonctions

$$Q_n(x, \alpha),\quad Q'_n(x, \alpha),\quad \ldots,\quad Q_n^{(n)}(x, \alpha);$$

il suffit, pour le faire voir, de considérer l'équation différentielle (d) et de former le tableau

$$\begin{array}{r}
Q''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - (2n-1)(\alpha - x)Q_n(x, \alpha) + n^2 Q_n(x, \alpha) = 0,\\
Q'''_n(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - (2n-3)(\alpha - x)Q''_n(x, \alpha) + (n-1)^2 Q'_n(x, \alpha) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Q_n^{(n)}(x, \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2) - 3(\alpha - x)Q_n^{(n-1)}(x, \alpha) + 2^2 Q_n^{(n-2)}(x, \alpha) = 0,
\end{array}$$

qui nous montre que les dérivées de $Q_n(x, \alpha)$ jouissent des propriétés des fonctions de Sturm.

On pourrait aussi appliquer le théorème de Rolle pour arriver au même résultat; il suffirait de considérer la relation (a), en faisant aussi usage de (c); la relation (c) nous montre en effet que

$$Q'_{n+1}(x, \alpha) = -(n+1)^2 Q_n(x, \alpha),$$

et, si l'on admet que $Q_n(x, \alpha) = 0$ a toutes ses racines réelles et séparées par celles de $Q_{n-1} = 0$, on montre aisément que $Q_{n+1}(x, \alpha) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles et séparées par celles de $Q_n(x, \alpha) = 0$.

On arrive encore au même résultat en appliquant le théorème de Rolle, au moyen de l'équation différentielle (d). On voit clairement, dans tout ce qui précède, la nécessité de supposer que le polynôme

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)$$

ne change pas de signe quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$ et par suite la nécessité d'astreindre x à être compris entre -1 et $+1$.

3. Si l'on développe la fonction $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$ suivant les puissances ascendantes de α, sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \ldots + \alpha^n X_n + \ldots,$$

les coefficients $X_0, X_1, \ldots, X_n$ sont, comme l'on sait, les polynômes de Legendre. Leur degré en x est égal à l'indice de X. Ces polynômes sont liés aux polynômes $Q_n(x, \alpha)$ par la relation

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = X_n;$$

or

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n} = \frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

En faisant $\alpha = 0$ dans cette égalité, on obtient

$$1.2.3\ldots n X_n = Q_n(x, 0).$$

Cette relation nous fournit immédiatement celle qui lie entre eux trois polynômes X d'indices consécutifs. En faisant $\alpha = 0$ dans la relation (a), on obtient

$$Q_{n+1}(x, 0) + (2n + 1)(-x) Q_n(x, 0) + n^2 Q_{n-1}(x, 0) = 0$$

ou

$$(n+1)!\,X_{n+1} - (2n+1)x.n!\,X_n - n^2(n-1)!\,X_{n-1} = 0,$$

en désignant le produit $1.2.3\ldots n$ par $n!$.

En supprimant le facteur numérique $n!$, il viendra

$$(e)\qquad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

Cette relation permet d'appliquer le théorème de Sturm à l'équation

$$X_n = 0,$$

et de montrer qu'elle a toutes ses racines réelles.

Pour savoir si la suite $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0$ gagne ou perd ses variations, il suffit de considérer l'équation (e), qui nous fait voir que les coefficients de la plus haute puissance de x ont le même signe dans toutes les fonctions $X_n, X_{n-1}, \ldots, X$. La suite perd donc ses variations quand x passe de $-\infty$ à $+\infty$.

Le polynôme $Q_n(x, \alpha)$ peut s'exprimer d'une manière simple en fonction des quantités X_n.

On a, en effet,

$$Q_n(x,\alpha) = Q_n(x,0) + \alpha Q'_n(x,0) + \frac{\alpha^2}{1.2} Q''_n(x,0) + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} Q_n^{(n)}(x,0),$$

les dérivées étant prises par rapport à α.

D'après la relation (c),

$$Q'_n(x,\alpha) = -n^2 Q_{n-1}(x,\alpha);$$

par suite,

$$Q''_n(x,\alpha) = -n^2 Q'_{n-1}(x,\alpha) = n^2(n-1)^2 Q_{n-2}(x,\alpha),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q^{(\mu)}(x,\alpha) = (-1)^\mu n^2(n-1)^2 \ldots (n-\mu+1)^2 Q_{n-\mu}(x,\alpha).$$

En faisant $\alpha = 0$ dans toutes ces égalités, on aura

$$Q'_n(x, 0) = -n^2 Q_{n-1}(x, 0),$$
$$Q''_n(x, 0) = n^2(n-1)^2 Q_{n-2}(x, 0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Q^{(\mu)}(x, 0) = (-1)^\mu n^2(n-1)^2 \dots (n-\mu+1)^2 Q_{n-\mu}(x, 0),$$

et, en remplaçant $Q_{n-1}(x, 0), \dots, Q_{n-\mu}(x, 0)$ par leur expression en $X_{n-1}, \dots, X_{n-\mu}$, il viendra

$$Q'_n(x, 0) = -n.n!\,X_{n-1},$$
$$Q''_n(x, 0) = n(n-1)\,n!\,X_{n-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Q_n^{(\mu)}(x, 0) = (-1)^\mu n(n-1)\dots(n-\mu+1)\,n!\,X_{n-\mu};$$

on peut donc écrire

$$\frac{Q_n(x, \alpha)}{n!} = X_n - n\alpha X_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 X_{n-2} - \dots$$
$$+ (-1)^\mu \frac{n(n-1)\dots(n-\mu+1)}{\mu!}\alpha^\mu X_{n-\mu} + \dots$$

L'équation différentielle (d) nous fournit la valeur de $Q_n(x, \alpha)$ pour $x = 0$; cette expression peut aussi se tirer de la précédente en remarquant qu'on a, d'une manière générale,

$$(n+1)[X_{n+1}]_{x=0} + n[X_{n-1}]_{x=0} = 0.$$

Les polynômes X_n ne renferment, d'après la relation (e), que des puissances de même parité; l'expression de $Q_n(0, \alpha)$ ne renfermera donc que des puissances de α de même parité. L'équation différentielle (d) nous donne

$$(-1)^n \frac{Q_n(0, \alpha)}{n!} = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2}\alpha^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 \times 2^4}\alpha^{n-4} - \dots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{(1.2.3.p)^2\,2^{2p}}\alpha^{n-2p} + \dots$$

La valeur $x=0$ transforme $(1-2\alpha x+\alpha^2)$ en $1+\alpha^2$; par suite, l'équation

$$Q_n(0,\alpha)=0$$

a aussi toutes ses racines réelles.

4. Nous allons maintenant chercher d'autres expressions du polynôme $\mathbf{X}_n$.

A cet effet, remarquons que

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

peut s'écrire

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{1-x^2}}=z,$$

on aura

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

par suite

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{\partial y}{\partial z}\times\frac{\partial z}{\partial \alpha}=\frac{\partial y}{\partial z}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}=\frac{\partial^n y}{\partial z^n}\,\frac{(-1)}{(\sqrt{1-x^2})^n}.$$

Or

$$\frac{\partial^n y}{\partial z^n}=\frac{Q_n(0,z)}{(1-z^2)^{+n\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

par suite

$$\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}=\frac{Q_n(0,z)}{(1+z^2)^{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^n}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

et, faisant $\alpha = 0$,

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=0} = \frac{Q_n(0, z_0)}{(1+z_0^2)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}},$$

en désignant par z_0 ce que devient z pour $\alpha = 0$. Mais

$$z = \frac{x-\alpha}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{donc} \qquad z_0 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$1 + z_0^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2};$$

par suite

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}(-1)^n}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1}},$$

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial \alpha^n}\right)_0 = (-1)^n Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(\sqrt{1-x^2})^n,$$

ou enfin

$$n!\, X_n = (-1)^n Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(\sqrt{1-x^2})^n.$$

Cette égalité nous fait voir que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes comprises entre -1 et $+1$.

En effet, l'équation

$$Q_n(0, \alpha) = 0$$

a toutes ses racines réelles; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ces racines.

Les racines de l'équation $X_n = 0$ étant désignées par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}},$$

d'où

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\alpha_1^2}}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1+\alpha_n}},$$

au signe près; on voit par suite que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont toutes réelles et plus petites que l'unité en valeur absolue.

Nous avons trouvé l'expression de $Q_n(0, \alpha)$, à savoir

$$(-1)^n \frac{Q_n(0, \alpha)}{n!} = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2}\alpha^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4}\alpha^{n-4} - \ldots;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{(-1)^n}{n!} Q_n\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(\sqrt{1-x^2})^n \\ &= x^n - \frac{n(n-1)}{1.2^2} x^{n-2}(1-x^2) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4} x^{n-4}(1-x^2)^2 + \ldots \\ &\quad + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(p!)^2 \times 2^{2p}} x^{n-2p}(1-x^2)^p + \ldots . \end{aligned}$$

On sait que, si l'on prend la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$ en employant la formule connue pour la dérivée d'ordre n d'une fonction de fonction de la forme $\varphi(x^2)$, à savoir

$$\begin{aligned} \frac{d^n[\varphi(x^2)]}{dx^n} &= (2x)^n \varphi^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}\varphi^{n-1}(x^2) \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}\varphi^{n-2}(x^2) + \ldots, \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} = 2^n n!\Big[x^n &+ \frac{n(n-1)}{2^2}x^{n-2}(x^2-1) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(1.2)^2 2^4}x^{n-4}(x^2-1)^2 + \ldots\Big]. \end{aligned}$$

En comparant cette expression avec celle de X_n précédemment trouvée, il viendra

$$X_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n},$$

qui est l'expression bien connue du polynôme X_n.