Nouvelles annales de mathématiques

Weill

Sur quelques formes quadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 85-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__85_1>

SUR QUELQUES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. WEILL.

I. L'expression

$$(b-c)(\lambda+a)^2+(c-a)(\lambda+b)^2+(a-b)(\lambda+c)^2$$

étant indépendante de λ, il en résulte que tout nombre appartenant à la forme

$$(b-c)\,a^2+(c-a)\,b^2+(a-b)\,c^2$$

peut, d'une infinité de manières, être mis sous la forme

$$(b-c)\,X^2+(c-a)\,Y^2+(a-b)\,Z^2.$$

Par une transformation facile, on en conclut que tout nombre de la forme

$$pq(p+q)$$

peut, d'une infinité de manières, se mettre sous la forme

$$px^2+qy^2-(p+q)z^2.$$

Ainsi, tout nombre de la forme $m(m+1)$ est, d'une infinité de manières, de la forme

$$mx^2+y^2-(m+1)z^2.$$

De même, tout nombre de la forme $2m^2$ est, d'une infinité de manières, de la forme

$$x^2+y^2-2z^2.$$

Il est facile de généraliser cette méthode et d'en déduire un grand nombre de résultats.

II. Soit un nombre de la forme

$$Ax^2+By^2+Cz^2.$$

Il appartiendra aussi à la forme

$$\begin{aligned} X^2+Y^2+Z^2 = {} & (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \\ & +(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)^2, \end{aligned}$$

si l'on a les égalités

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2, \\ B &= \beta^2+\beta'^2+\beta''^2, \\ C &= \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2, \\ 0 &= \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'', \\ 0 &= \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma'', \\ 0 &= \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2, \\ B &= \beta^2+\beta'^2+\beta''^2, \\ 0 &= \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''. \\ C &= AB. \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous ferons $\beta'' = 1$; d'où

$$B = \beta^2 + \beta'^2 + 1,$$
$$A = \alpha^2 + \alpha'^2 + (\alpha\beta + \alpha'\beta')^2,$$
$$C = AB.$$

On a ainsi une solution très générale, mais non la solution complète du problème suivant :

Trouver les formes des entiers A, B, C *qui soient telles que le nombre*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

soit une somme de trois carrés.

Ainsi le nombre

$$2x^2 + 3y^2 + 6z^2$$

est une somme de trois carrés ; de même,

$$5x^2 + 6y^2 + 30z^2$$

est une somme de trois carrés, et ainsi de suite.