NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur le théorème de Rolle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 75-79
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__75_1>

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. CH. BIEHLER.

1. On sait que, si toutes les racines de l'équation dérivée d'une équation algébrique et entière donnée sont *réelles et inégales;* de plus, si, rangées par ordre de grandeur et substituées dans la proposée, elles donnent des résultats de substitution alternativement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

Si les deux plus petites racines réelles de l'équation dérivée, ou les deux plus grandes, substituées dans le premier membre de l'équation proposée, donnent des *résultats de substitution de signes contraires, il y a, dans le premier cas, une racine de la proposée entre* $-\infty$ *et la plus petite racine de l'équation dérivée, et, dans le deuxième cas, il y a une racine de la proposée entre la plus grande racine de l'équation dérivée et* $+\infty$.

Rappelons en deux mots la démonstration de ce théorème.

Si $f(x)=0$ est l'équation proposée, $f'(x)=0$ l'équation dérivée, α et β les deux plus petites racines de l'équation dérivée, on a, par hypothèse, $f(\alpha)\,f(\beta)<0$; il y a donc une racine a de la proposée entre α et β, et l'on a pour une valeur de ε suffisamment petite

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{f'(a-\varepsilon)}<0$$

et

$$\frac{f(-\infty)}{f'(-\infty)}<0.$$

Or $f'(a-\varepsilon)$ et $f'(-\infty)$ sont de signes contraires; par suite, $f(a-\varepsilon)$ et $f(-\infty)$ sont aussi de signes contraires; il y a donc une racine de $f(x)=0$ entre a et $-\infty$; elle ne peut être entre a et α : elle est donc entre $-\infty$ et α.

La démonstration serait la même pour les deux plus grandes racines de l'équation dérivée.

2. Proposons-nous d'étendre le théorème au cas où l'équation dérivée n'aurait pas toutes ses racines inégales.

Nous devons tout d'abord écarter le cas où l'équation dérivée aurait des racines multiples que n'admet pas la proposée; car, s'il en était ainsi, la proposée aurait nécessairement des racines imaginaires.

Supposons donc que l'équation dérivée ait toutes ses racines réelles et que ses racines multiples satisfassent toutes à la proposée.

Soient $a, b, \ldots, g$ les racines de la dérivée qui appartiennent à la proposée; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ leur degré de multiplicité dans la dérivée; soient $a', b', \ldots, l'$ les racines de l'équation dérivée non communes avec la proposée, supposées toutes simples et rangées par ordre de grandeur croissante. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Si tous les groupes (a', b'), (b', c'), ..., (k', l'), tels que les deux racines d'un même groupe ne comprennent entre elles aucune des racines $a, b, \ldots, g$, donnent, quand on les substitue dans le premier membre de la proposée, des résultats de substitution alternativement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

En effet, soit n le nombre des racines $a, b, \ldots, g$; m le nombre des racines $a', b', \ldots, l'$.

I. Supposons d'abord $a, b, \ldots, g$ toutes comprises entre a' et l' : le nombre de groupes de racines que l'on a à substituer d'après l'énoncé est $(m-1)-n$; il y a par hypothèse $m-1-n$ changements de signes et par suite $m-n-1$ racines réelles de $f(x)=0$ qui sont différentes des racines multiples de cette dernière

Il y en a une entre $-\infty$ et a' et une autre entre 1 et $+\infty$; car, si a' n'est pas compris entre a' et b', le théorème précédent s'applique sans modification, et, si a est compris entre a' et b', on a toujours, quel que soit le degré de multiplicité de a,

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{f'(a-\varepsilon)} < 0, \qquad \frac{f(-\infty)}{f'(-\infty)} < 0;$$

par suite, $f(a-\varepsilon)$ et $f(-\infty)$ sont de signes contraires; la nouvelle racine de $f(x)=0$ est comprise entre $-\infty$ et a'; il en est de même pour l'.

L'équation $f(x)=0$ a donc $m-n+1$ racines réelles distinctes; elle a aussi

$$(\alpha+1)+(\beta+1)+\ldots+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\ldots+\gamma+n$$

racines réelles multiples d'ordre de multiplicité $\alpha+1$, $\beta+1, \ldots, \gamma+1$; elle a donc en tout

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+m+1$$

racines réelles; ce nombre représente précisément le degré de l'équation $f(x)=0$, par suite, toutes les racines de la proposée sont réelles.

II. Supposons que la plus petite racine a du groupe $a, b, \ldots, g$ soit moindre que a' et que g soit plus petit que l'. Les substitutions donnent alors $(m-1)-(n-1)$ changements de signes et, par conséquent, nous révèlent l'existence de $(m-1)-(n-1)$ racines réelles distinctes de $f(x)=0$; il y a en outre une racine de la même équation entre l' et $+\infty$; en y ajoutant les

$$\alpha+\beta-\ldots+\gamma+n$$

racines multiples, on obtient un total de

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma+m+1,$$

qui est encore le degré de l'équation.

III. Supposons maintenant $a<a'$ et $g>l'$; nous n'aurons plus que $m-1-(n-2)$ groupes à substituer, et par hypothèse tous ces groupes nous donnent autant de changements de signes et par suite $m-n+1$ racines simples de $f(x)=0$; ce nombre, joint au nombre des racines multiples, forme encore une somme égale au degré de l'équation proposée. Il est évident d'ailleurs que les trois hypothèses précédentes sont les seules à examiner; on peut donc dire que, dans tous les cas qui peuvent se présenter et qui sont compatibles avec l'énoncé, l'équation proposée a toutes ses racines réelles.