P. Appell

Sur les valeurs approchées des polynômes de Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 547-554

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__547_1>

SUR LES VALEURS APPROCHÉES DES POLYNOMES DE BERNOULLI;

PAR M. P. APPELL.

1. Dans une Note précédente [1], nous avons indiqué les principales propriétés des polynômes de Bernoulli $\varphi_p(x)$ qui, pour des valeurs entières positives de x,

[1] *Nouvelles Annales*, p. 312 du présent Volume.

expriment la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers

$$\varphi_0(x) = x, \qquad \varphi_1(x) = \frac{x(x+1)}{2},$$
$$\varphi_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, \qquad \ldots.$$

Nous nous proposons maintenant de chercher une valeur approchée du polynôme $\varphi_p(x)$ quand p est très grand, et, pour cela, nous suivrons une méthode générale qui a été donnée par M. Darboux dans un Mémoire *Sur l'approximation de fonctions de très grands nombres* (*Journal de Liouville,* 3e série, t. IV; 1878).

La fonction de z

$$(1) \qquad f(z) = \frac{e^{z(x+1)} - 1}{e^z - 1}$$

est *holomorphe* (c'est-à-dire est uniforme, finie, et admet une dérivée) pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 2π; en effet, cette fonction devient infinie aux seuls points

$$z = \pm 2\pi i, \qquad z = \pm 4\pi i, \qquad \ldots, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

On peut donc développer $f(z)$ par la formule de Maclaurin en une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de z convergente dans le cercle de rayon 2π. Si l'on calcule les coefficients de ce développement, on voit que le coefficient de $\frac{z^p}{1.2\ldots p}$ est un polynôme en x qui se réduit à

$$1^p + 1^p + 3^p + \ldots + x^p$$

quand x est entier et positif : ce coefficient est donc le polynôme $\varphi_p(x)$, et l'on peut écrire

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{1.2\ldots p} \varphi_p(x).$$

Le fait que le coefficient de $\frac{z^p}{1.2\ldots p}$ se réduit à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers entiers quand x est entier et positif, résulte immédiatement de ce que, si x est un entier positif, $e^{z(x+1)}-1$ est divisible par e^z-1, et qu'on a, dans ce cas,

$$f(z) = 1 + e^z + e^{2z} + \ldots + e^{xz}.$$

Cela posé, on peut toujours déterminer deux constantes A et B, de telle façon que la différence

$$(3) \qquad \psi(z) = f(z) - \frac{A}{z-2\pi i} - \frac{B}{z+2\pi i}$$

reste finie, quel que soit x, pour $z = 2\pi i$ et pour $z = -2\pi i$. En effet, le produit

$$(z-2\pi i)\,f(z) = \frac{z-2\pi i}{e^z-1}\left[e^{z(x+1)}-1\right]$$

est une fonction de z holomorphe dans le voisinage de $z = 2\pi i$: par suite, pour des valeurs de z voisines de $2\pi i$, cette fonction est développable par la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $(z-2\pi i)$,

$$(4) \quad (z-2\pi i)f(z) = A + A_1(z-2\pi i) + A_2(z-2\pi i)^2 + \ldots,$$

où A est la valeur que prend le produit $(z-2\pi i)f(z)$ pour $z = 2\pi i$,

$$A = e^{2\pi i(x+1)} - 1 = e^{2\pi x i} - 1 = i\sin 2\pi x - 2\sin^2\pi x.$$

Il résulte alors du développement (4) que la différence

$$f(z) - \frac{A}{z-2\pi i} = A_1 + A_2(z-2\pi i) + \ldots$$

reste finie pour $z = 2\pi i$. On verra de même que, en prenant pour B la valeur du produit $(z+2\pi i)f(z)$ pour

$z = -2\pi i$, à savoir

$$B = e^{-2\pi i(x+1)} - 1 = -i\sin 2\pi x - 2\sin^2\pi x,$$

la différence

$$f(z) - \frac{B}{z + 2\pi i}$$

reste finie quand z tend vers $-2\pi i$.

Les constantes A et B étant ainsi déterminées, la différence (3) appelée $\psi(z)$ est finie aux deux points $\pm 2\pi i$. La fonction $\psi(z)$ ne devient plus infinie qu'aux points $\pm 4\pi i$, $\pm 6\pi i$, ... : elle est donc développable, par la formule de Maclaurin, pour les valeurs de z dont le module est inférieur à 4π, et l'on a, pour ces valeurs,

$$\psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \ldots.$$

Cette série est convergente, en particulier pour $2 = z\pi$, et l'on a

$$\lim(2\pi)^p a_p = 0 \qquad (p = \infty),$$

puisque le terme général d'une série convergente a pour limite zéro.

Écrivons alors l'identité (3) sous la forme

$$f(z) = \psi(z) + \frac{A}{z - 2\pi i} + \frac{B}{z + 2\pi i},$$

et, en supposant le module de z inférieur à 2π, développons les deux membres suivant les puissances positives croissantes de z : les coefficients de z^p devant être les mêmes dans les deux membres, on aura

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_p(x)}{1.2\ldots p} &= a_p - \frac{A + (-1)^p B}{(2\pi i)^{p+1}}\\ &= -[A - (-1)^p B]\frac{(1 + \varepsilon_p)}{(2\pi i)^{p+1}}\end{aligned}$$

en désignant par ε_p la quantité

$$\varepsilon_p = -\frac{a_p(2\pi i)^{p+1}}{A-(-1)^p B}$$

qui tend vers zéro quand p croît indéfiniment, d'après la remarque faite plus haut sur le produit $(2\pi)^p a_p$. D'après cela, en remplaçant A et B par leurs valeurs et distinguant les deux cas de p impair et de p pair, on a, pour les valeurs approchées de $\varphi_p(x)$ quand p est très grand,

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}.1.2.3\ldots(2n+1)\dfrac{\sin^2\pi x}{2^{2n}\pi^{2n+2}}(1+\varepsilon_{2n+1}), \\ \varphi_{2n}(x) \quad = (-1)^{n+1}.1.2.3\ldots 2n\dfrac{\sin 2\pi x}{2^{2n}\pi^{2n+1}}(1+\varepsilon_{2n}). \end{cases}$$

Lorsque x est entier, les quantités appelées A et B sont nulles et, par suite, la quantité appelée ε_p est infinie : les formules deviennent illusoires à partir du moment où l'on a introduit ε_p.

Ces formules (5) pourraient aussi se déduire des développements en série trigonométrique que donne Raabe dans le Tome 42 du *Journal de Crelle* pour les polynômes $\varphi_p(x)$. Il serait trop long de reproduire ici ces développements; je me bornerai à rappeler que M. Hermite a indiqué, dans le Tome 79 du *Journal de Crelle,* une méthode très simple pour les obtenir.

2. Ces résultats permettent, dans beaucoup de cas, de reconnaître la convergence ou la divergence de séries ordonnées suivant les polynômes $\varphi_p(x)$. Si nous prenons, par exemple, la série

$$S = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\varphi_0(x) + \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2}\right]\varphi_1(x) + \ldots$$
$$+ \left[\frac{1}{z^n} - \frac{1}{(z+1)^n}\right]\varphi_{n-1}(x) + \ldots$$

que nous avons considérée dans notre précédent article, nous avons facilement le résultat suivant :

La série S *est convergente quand* x *est un nombre entier positif ou négatif dont la valeur absolue est plus petite que celui des modules de* z *et de* $z+1$ *qui est le plus petit; elle a alors pour somme* $\frac{1}{z-x}$. *Cette série est divergente pour toute autre valeur de* x.

Pour le montrer, supposons d'abord que x soit un *nombre entier positif;* nous aurons

$$\varphi_p(x) = 1 + 2^p + 3^p + \ldots + x^p,$$

et la somme S_n des n premiers termes de la série S peut s'écrire

$$\begin{aligned}
S_n = \frac{1}{z} &+ \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{z^n}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{z^n}\right) + \ldots \\
&+ \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{z^n}\right) \\
&- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z+1)^n}\right] \\
&- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}\right] \\
&- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{3}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{(z+1)^n}\right] - \ldots \\
&- \left[\frac{1}{z+1} + \frac{x}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(z+1)^n}\right],
\end{aligned}$$

où les parenthèses sont des progressions géométriques dont les raisons respectives

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{2}{z}, \quad \frac{3}{z}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{z}, \quad \frac{1}{z+1}, \quad \frac{2}{z+1}, \quad \ldots, \quad \frac{x}{z+1}$$

ont toutes, d'après l'hypothèse, des modules moindres que l'unité. Si donc on fait croître n indéfiniment, toutes ces progressions sont convergentes et l'on trouve

$$\begin{aligned} S = \lim S_n = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \ldots \\ + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} - \ldots - \frac{1}{z-x+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$S = \lim S_n = \frac{1}{z-x}.$$

Si x est un entier *négatif*, tel que les modules de $\frac{x}{z}$ et $\frac{x}{z+1}$ soient tous deux moindres que l'unité, on vérifie sans peine, en appliquant la même méthode et s'appuyant sur les relations

$$\begin{gathered} \varphi_0(-x) = -\varphi_0(x), \\ \varphi_p(-x) = (-1)^{p+1}\varphi_p(x-1), \qquad (p > 0), \end{gathered}$$

que la série S est convergente et a pour somme $\frac{1}{z-x}$. Enfin, si x est nul, la série a évidemment pour somme $\frac{1}{z}$, c'est-à-dire encore $\frac{1}{z-x}$.

Mais il est très remarquable que, pour toute autre valeur de x (*non entière*), la série S est divergente, quel que soit z. En effet, dans ce cas, le terme de rang $(2n+3)$ de cette série a pour valeur approchée, quand n est très grand,

$$(-1)^{n+1}.1.2.3\ldots(2n+1)\left[\frac{1}{z^{2n+2}} - \frac{1}{(z+1)^{2n+2}}\right]\frac{4\sin^2\pi x}{(2\pi)^{2n+2}}(1+\varepsilon_{2n+1});$$

et, à cause du facteur $1.2.3\ldots(2n+1)$, ce terme *augmente indéfiniment* avec n, quel que soit z. La série S est donc divergente.

Il est évident que l'on pourra former une infinité d'autres séries de polynômes $\varphi_p(x)$ possédant la même propriété que la série S, c'est-à-dire convergentes pour certaines valeurs entières de x et divergentes pour toute autre valeur de x.