NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Les coordonnées parallèles de points

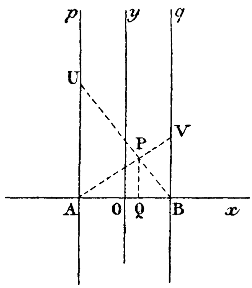
Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 493-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__493_0>

LES COORDONNÉES PARALLÈLES DE POINTS;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Soient, pris dans un plan, deux axes Ap et Bq perpendiculaires à la droite AB. Les droites AP et BP



coupant respectivement Bq et Ap aux points V et U, nous poserons, en tenant compte des signes,

$$p = \frac{1}{\mathrm{AU}}, \qquad q = \frac{1}{\mathrm{BV}},$$

et nous dirons que p et q sont les *coordonnées parallèles du point* P.

En considérant, comme nous l'avons fait dans un précédent travail (1), les coordonnées parallèles de droites (AV et BV) comme corrélatives des coordonnées cartésiennes, on voit que les coordonnées parallèles de points correspondent exactement aux coordonnées plückériennes de droites.

(1) Voir *Nouvelles Annales*, p. 110; 1885

2. Par le milieu O de AB élevons à cette droite, prise pour axe Ox, la perpendiculaire Oy, et convenons de *prendre le segment* OB *pour unité de longueur.*

On voit alors immédiatement que

$$(1) \qquad p = \frac{1-x}{2y}, \qquad q = \frac{1+x}{2y},$$

d'où

$$(2) \qquad x = \frac{q-p}{q+p}, \qquad y = \frac{1}{q+p}.$$

Donc, *les équations d'une même courbe en x et y d'une part, et p et q de l'autre, sont du même degré.*

3. Étudions d'abord les particularités qu'offre l'équation de la droite.

L'équation

$$ap + bq + c = 0,$$

transformée au moyen des formules (1), devient

$$(b-a)x + 2cy + (a+b) = 0.$$

De là ces conséquences :

Si $a + b = 0$, la droite passe par O;
Si $a = 0$, la droite passe par A;
Si $b = 0$, la droite passe par B;
Si $a = b$, la droite est parallèle à Ox;
Si $c = 0$, la droite est parallèle à Oy.

L'abscisse à l'origine a pour expression

$$X = \frac{a+b}{a-b}.$$

On tire de là

$$\frac{X+1}{X-1} = \frac{a}{b}$$

ou, si M est le point où la droite coupe l'axe AB,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}. \tag{3}$$

4. Voici une première application de cette formule (3),

Soient $P_1P_2P_3$ *un triangle,* A *et* B *deux points, pris d'une manière quelconque dans son plan. Les côtés* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 *de ce triangle coupent la droite* AB *en des points* M_3, M_1, M_2 *dont les conjugués harmoniques par rapport aux points* A *et* B *sont* M'_3, M'_1, M'_2. *Les droites* $P_1M'_1$, $P_2M'_2$ *et* $P_3M'_3$ *concourent en un même point.*

Prenons, par les points A et B, des axes Ap et Bq perpendiculaires à AB, et soient, pour ces axes parallèles, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3) les coordonnées des points P_1, P_2, P_3.

L'équation de la droite P_1P_2 peut évidemment s'écrire

$$(p - p_1)(q_2 - q_1) - (q - q_1)(p_2 - p_1) = 0.$$

Donc, d'après la formule (3),

$$\frac{M_3B}{M_3B} = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}.$$

Par suite,

$$\frac{M'_3A}{M'_3B} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1},$$

et l'équation de la droite $P_3M'_3$ est

$$(p - p_3)(q_2 - q_1) + (q - q_3)(p_2 - p_1) = 0$$

ou

$$p(q_2 - q_1) + q(p_2 - p_1) = p_3(q_2 - q_1) + q_3(p_2 - p_1).$$

De même les équations de $P_2M'_2$ et de $P_1M'_1$ sont

$$p(q_1 - q_3) + q(p_1 - p_3) = p_2(q_1 - q_3) + q_2(p_1 - p_3),$$
$$p(q_3 - q_2) + q(p_3 - p_2) = p_1(q_3 - q_2) + q_1(p_3 - p_2).$$

Faisant la somme de ces trois dernières équations, on obtient une identité, ce qui démontre le théorème.

5. Reprenant les équations du n° 3, nous voyons que le coefficient angulaire m de la droite

$$ap + bq + c = 0$$

est donnée par

$$m = \frac{a - b}{2c}. \tag{4}$$

La condition de parallélisme de deux droites est donc

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a' - b'}{c'};$$

la condition de perpendicularité

$$\frac{(a - b)(a' - b')}{4cc'} = -1;$$

et l'angle V de deux droites est donné par

$$\tan V = \frac{c'(a - b) - c(a' - b')}{4cc' + (a - b)(a' - b')}. \tag{5}$$

6. Cherchons encore, en coordonnées parallèles de points, la distance du point (P, Q) à la droite

$$ap + bq + c = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, on a pour le point

$$X = \frac{Q - P}{Q + P}, \qquad Y = \frac{1}{Q + P},$$

et pour la droite

$$(b - a)x + 2cy + (a + b) = 0.$$

La distance d cherchée est donc

$$d = \frac{(b-a)\dfrac{Q-P}{Q+P} + 2c\dfrac{1}{Q+P} + (a+b)}{\sqrt{(b-a)^2+4c^2}},$$

ou

$$(6) \qquad d = \frac{2(aP+bQ+c)}{(P+Q)\sqrt{(b-a)^2+4c^2}}.$$

7. L'équation générale des coniques, dans ce système de coordonnées, est (n° 2) l'équation complète du second degré

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f = 0.$$

Si, à l'aide des formules (1), on passe aux coordonnées cartésiennes, et que l'on représente par

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation à laquelle on parvient, on a

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{lll} A = \dfrac{a-2b+c}{4}, & B = \dfrac{e-d}{2}, & C = f, \\ D = \dfrac{c-a}{4}, & E = \dfrac{d+e}{2}, & F = \dfrac{a+2b+c}{2}, \end{array}\right.$$

ou

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll} a = A - 2D + F, & b = F - A, & c = A + 2D + F \\ d = E - B, & e = B + E, & f = C. \end{array}\right.$$

Ces formules suffisent à déduire toute la théorie des coniques en coordonnées parallèles de points de la théorie en coordonnées cartésiennes.

Ainsi, suivant que la quantité

$$(e-d)^2 - (a-2b+c)f$$

est positive, nulle ou négative, la conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Si l'on a, à la fois,

$$a - 2b + c = 4f, \qquad d = e,$$

la conique est un cercle; c'est une hyperbole équilatère si

$$a - 2b + c + 4f = 0,$$

8. Aux formes

$$pq = k, \qquad q^2 + p^2 = k. \qquad q^2 - p^2 = k$$

répondent les équations cartésiennes

$$x^2 + 4ky^2 = 1, \qquad 2ky^2 - x^2 = 1, \qquad ky^2 + x = 0.$$

La première représente une ellipse ou une hyperbole selon que k est positif ou négatif. Les points A et B sont des sommets de la courbe et Ox et Oy en sont les axes.

La deuxième représente une hyperbole ayant Oy pour axe transverse et Ox pour axe non transverse; en outre, A et B sont les sommets de l'*hyperbole complémentaire*. Enfin la dernière représente une parabole ayant la droite Ox pour axe, et le point O pour sommet.

9. L'équation de la tangente au point (p_1, q_1) sera

$$(p - p_1)dq_1 = (q - q_1)dp_1. \tag{9}$$

Si l'équation de la courbe est $F(p, q) = 0$, l'équation (12) peut s'écrire

$$(p - p_1)F'_{p_1} + (q - q_1)F'_{q_1} = 0. \tag{10}$$

Donc, d'après (3), si M est le point où la tangente coupe l'axe AB, on a

$$\frac{MA}{MB} = \frac{F'_{p_1}}{F'_{q_1}}. \tag{11}$$

L'équation de la polaire du point (p_1, q_1, r_1) est

$$p\,F_{p_1} + q\,F'_{q_1} + r\,F'_{r_1} = 0,$$

r et r_1 étant introduits pour l'homogénéité. Le centre, pôle de la droite de l'infini, est donc donné par les relations

$$F'_{p_1} = F'_{q_1}, \qquad F'_{r_1} = 0.$$

10. Tout point à l'infini ayant évidemment ses coordonnées p et q égales et de signes contraires, on aura les points d'intersection de la courbe et de la droite de l'infini, à l'aide des deux relations

$$F(p, q) = 0, \qquad p + q = 0.$$

Il n'y aura qu'à porter les systèmes de valeurs, p_1 et q_1, de p et de q, satisfaisant simultanément à ces deux équations, dans l'équation (9) de la tangente, pour obtenir les équations des asymptotes. Si (p_1, q_1) est une solution double, triple, etc., de ce système d'équations, l'asymptote correspondante a un contact double, triple, etc., à l'infini avec la courbe considérée.

Si l'équation de la courbe est de degré n et que le système précédent n'admette que $n - k$ systèmes de solutions finies communes, c'est qu'il y a k asymptotes parallèles à l'axe AB. Il est facile de déterminer ces asymptotes. En effet, l'équation de toute droite parallèle à AB est de la forme

$$p + q = C.$$

Éliminant q entre cette équation et celle de la courbe, on obtient une équation généralement de degré $n - k$ en p, le coefficient du terme en p^{n-k} étant un polynôme $\varphi_k(C)$ de degré k en C. Pour que la parallèle à AB considérée soit une asymptote, il faut qu'une des racines de l'équation en p soit infinie et, par suite, que le coefficient du terme en p^{n-k} soit nul, c'est-à-dire que

$$\varphi_k(C) = 0.$$

La résolution de cette équation fait donc connaître les valeurs de C qui donnent les asymptotes parallèles à AB. Si cette équation a elle-même une racine infinie, c'est-à-dire si son degré se réduit à $k-1$, c'est que l'axe AB est lui-même asymptote à la courbe.

Par exemple, pour la courbe

$$(ab-k^2)(p+q)^2-b(q^2-p^2)-a(q+p)+q-p=0,$$

on trouve les deux asymptotes

$$(a+1)p+(a-1)q=0, \qquad p+q=\frac{1}{b}.$$

La première est la parallèle à Oy dont la distance au point O est égale à a, et la seconde la parallèle à Ox dont la distance au point O est égale à b.

11. Disons maintenant quelques mots de l'application du *principe de dualité* au moyen des coordonnées parallèles de points.

Si, dans les équations d'un problème traité en x et y, on remplace ces variables par p et q, on obtient une proposition corrélative.

D'après les formules (1), la transformation ainsi définie est un cas particulier de la transformation homographique générale. Donc :

Le rapport anharmonique de quatre points se conserve dans la transformation.

On voit en outre qu'à la droite à l'infini en x et y correspond l'axe AB en p et q. Par conséquent, au centre de gravité d'un système de points en x et y, correspond en p et q le pôle de l'axe AB par rapport à un système de points; au centre d'une conique correspond le pôle de AB par rapport à une conique, etc.

12. Pour la transformation des propriétés angulaires, la solution est fournie évidemment par le beau théorème de Laguerre. Mais ici la solution résulte immédiatement de la formule (3).

En effet, soient, en coordonnées cartésiennes, des droites dont les coefficients angulaires sont m, m', m'', ... Si les droites corrélatives en coordonnées p et q coupent l'axe AB aux points M, M′, M″, ..., on a, d'après (3),

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = -m, \qquad \frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}} = -m', \qquad \frac{\mathrm{M''A}}{\mathrm{M''B}} = -m'', \qquad \ldots.$$

Donc, à la relation

$$\varphi(m, m', m'', \ldots) = 0,$$

qui exprime une propriété angulaire, correspond la relation

$$\varphi\left(-\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}, -\frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}}, -\frac{\mathrm{M''A}}{\mathrm{M''B}}, \ldots\right) = 0.$$

En particulier, à deux droites perpendiculaires,

$$mm' = -1,$$

correspondent deux droites liées par la relation

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}\,\frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}} = -1,$$

c'est-à-dire que *si ces droites coupent l'axe* AB *respectivement aux points* M *et* M′, *le symétrique de chacun de ces deux points par rapport au milieu* O *de* AB *coïncide avec le conjugué harmonique de l'autre par rapport aux points* A *et* B. Autrement dit : *Les points* M *et* M′ *sont conjugués harmoniques par rapport aux points de l'axe* AB *situés de part et d'autre du milieu* O *de* AB *à la distance* $\sqrt{-1}$ *de ce point.* Ces deux derniers points sont corrélatifs des *ombilics* en coordonnées cartésiennes.

Toutes les propriétés où interviennent des droites perpendiculaires sont immédiatement transformées par l'emploi de la proposition précédente.

Par exemple le théorème de Simpson et celui de Frégier donnent respectivement les propositions suivantes :

Soit $P_1P_2P_3$ *un triangle inscrit dans une hyperbole. Les côtés* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 *de ce triangle coupent l'axe non transverse aux points* M_3, M_1, M_2. *On prend les symétriques* M'_3, M'_1, M'_2, *par rapport au centre de la courbe, des conjugués harmoniques de* M_3, M_1 *et* M_2 *par rapport aux sommets de l'hyperbole complémentaire. Si* P *est un point quelconque de l'hyperbole, les droites* PM'_3, PM'_1, PM'_2 *rencontrent respectivement les côtés* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 *du triangle inscrit en trois points qui sont en ligne droite.*

Soient K *une conique sur laquelle on prend un point fixe* P, A *et* B *deux points quelconques du plan de cette conique. Une corde* $P'P''$ *varie dans la conique* K *de telle façon que, si les droites* PP' *et* PP'' *coupent la droite* AB *aux points* M' *et* M'', *le symétrique de chacun de ces points par rapport au milieu de* AB *se confonde avec le conjugué harmonique de l'autre par rapport aux points* A *et* B. *La corde* $P'P''$ *passe par un point fixe.*

N. B. — Page 493, ligne 10, *au lieu de* AV, *lisez* AU.

Page 495, ligne 20, *au lieu de* $\frac{M_3B}{M_3B}$, *lisez* $\frac{M_3A}{M_3B}$.