NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. ROUCHÉ

Propriétés géométriques des polygones funiculaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 439-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__439_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES POLYGONES FUNICULAIRES;

PAR M. E. ROUCHÉ [1].

DÉFINITION DES POLYGONES FUNICULAIRES.

1. Si, sur la ligne d'action d'une force, on porte, à partir du point où cette force est appliquée et dans le sens suivant lequel elle agit, une longueur ayant avec l'unité de longueur un rapport égal à celui de la force à l'unité de force, on obtient un segment rectiligne qu'on nomme *segment représentatif* de la force. Nous donnerons le nom de *vecteur* de la force à tout segment ayant la même grandeur, la même direction et le même sens que le segment représentatif. Tandis que le segment représentatif détermine la force en grandeur, *position* et sens, le vecteur ne donne que la grandeur, la *direction* et le sens de la force.

Nous nommerons *polygone des vecteurs* d'un système de forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 la ligne brisée

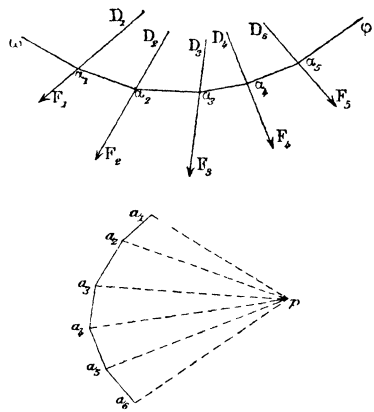
$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6,$$

obtenue en menant bout à bout, à partir d'une origine arbitraire a_1, les vecteurs respectifs $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$,

[1] Extrait des Leçons de Statique graphique faites au Conservatoire des Arts et Métiers en 1886-1887.

$a_4 a_5$, $a_5 a_6$ des forces considérées. Il est clair que la connaissance des points d'application des forces et du polygone des vecteurs définit pleinement un système de forces (*fig.* 1).

Fig. 1.



Quand les forces sont appliquées à un corps rigide, on peut déplacer le point d'application de chacune d'elles sur sa ligne d'action. On définit alors le système en donnant, outre le polygone des vecteurs

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5,$$

les lignes d'action D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 des forces, lignes d'action qui sont d'ailleurs respectivement parallèles aux côtés $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_3 a_4$, $a_4 a_5$, $a_5 a_6$ du polygone des vecteurs.

2. Nous ne considérerons ici que des forces appliquées à un corps rigide et *toutes situées dans un même plan*.

Un tel système (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) étant donné par les lignes d'action D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 et le polygone

des vecteurs $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, prenons à volonté dans le plan des forces un point p auquel nous donnerons le nom de *pôle* du polygone des vecteurs, et joignons ce pôle aux divers sommets de ce polygone par des droites pa_1, pa_2, pa_3, pa_4, pa_5, pa_6 que nous nommerons *rayons polaires*.

Menons une parallèle quelconque $\omega\alpha_1$ au premier rayon pa_1, jusqu'à sa rencontre α_1 avec la ligne d'action D_1 de la première force F_1; puis, tirons par α_1 la parallèle $\alpha_1\alpha_2$ au second rayon jusqu'à sa rencontre α_2 avec la ligne d'action D_2 de la seconde force F_2; et ainsi de suite. Enfin par le point α_5 où la parallèle $\alpha_4\alpha_5$ à l'avant-dernier rayon pa_5 rencontre la ligne d'action D_5 de la dernière force F_5, menons $\alpha_5\varphi$ parallèle au dernier rayon pa_6.

Nous obtiendrons de la sorte une ligne brisée

$$\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\varphi,$$

dont le premier et le dernier côté $\omega\alpha_1$ et $\alpha_5\varphi$ sont indéfinis, et à laquelle on donne le nom de *polygone funiculaire,* relatif au pôle p, du système des forces considérées.

Pour que la construction réussisse, il faut que chacune des lignes $\omega\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, ... coupe la ligne d'action de la force suivante; il en sera toujours ainsi, si l'on choisit pour pôle p un point non situé sur les côtés du polygone des vecteurs ou sur leurs prolongements; car les rayons polaires coupant alors les côtés de ce polygone, les parallèles à ces rayons couperont les lignes d'action correspondantes.

Dans le cas où les forces sont parallèles, la construction d'un polygone funiculaire n'offre aucune particularité, mais les côtés du polygone des vecteurs sont alors sur une même ligne droite et le pôle p peut être pris à

volonté en dehors de cette droite indéfiniment prolongée.

Enfin, dans le cas d'une force unique, le polygone des vecteurs se réduit à un segment unique $a_1 a_2$, et un polygone funiculaire se compose seulement de deux côtés indéfinis $\omega\alpha$, $\alpha\varphi$ qu'on obtient en menant, par un point quelconque α de la ligne d'action, des parallèles aux deux rayons polaires pa_1 et pa_2.

Dans les figures suivantes, pour ne pas compliquer inutilement, nous désignerons par la même lettre une force quelconque et sa ligne d'action; nous emploierons d'ailleurs la notation

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$$

pour désigner le système des forces ayant $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pour lignes d'action et $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ pour polygone des vecteurs.

Lemmes de Géométrie.

3. *Soient* ABC, A'B'C' *deux triangles tels que les côtés* AB *et* AC *de l'un soient respectivement parallèles aux côtés* A'B' *et* A'C' *de l'autre. Si par le sommet* A *du premier on mène la parallèle* AD *à la base* B'C' *du second, et que par le sommet* A' *du second on mène la parallèle* A'D' *à la base* BC *du premier, les points* D *et* D' *diviseront les bases* BC *et* B'C' *en parties inversement proportionnelles* (*fig.* 2).

En effet, les triangles ABD, A'B'D' ayant leurs côtés parallèles sont semblables et donnent, en grandeur et en signe, la proportion

$$\frac{DB}{DA} = \frac{D'A'}{D'B'};$$

on a de même, par les triangles semblables ADC,

A′D′C′,

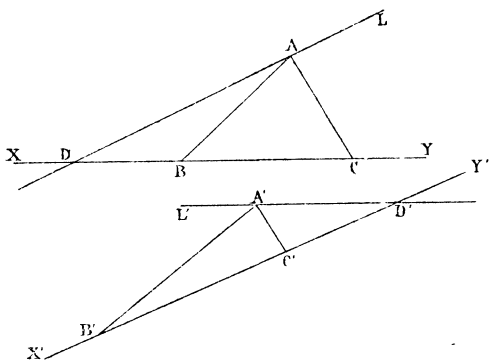
$$\frac{DA}{DC} = \frac{D'C'}{D'A'};$$

et il suffit de multiplier ces deux égalités membre à membre pour obtenir la relation

$$(1) \qquad \frac{DB}{DC} = \frac{D'C'}{D'B'},$$

qui exprime le théorème énoncé.

Fig. 2.



Il résulte d'ailleurs de l'égalité de ces rapports en grandeur et en signe que : *suivant que* D *tombe entre* B *et* C, *sur le prolongement de* BC *ou sur le prolongement de* CB, D′ *tombe entre* B′ *et* C′, *sur le prolongement de* C′B′ *ou sur le prolongement de* B′C′; la valeur commune des rapports (1) est dans le premier cas négative, dans le second cas supérieure à 1, enfin dans le troisième cas comprise entre 0 et 1.

4. De la proposition qui précède on déduit immédiatement la suivante :

Les bases BC, B′C′ *de deux triangles variables* ABC,

A'B'C' étant fixes, et les côtés AB *et* AC *restant respectivement parallèles à* A'B' *et* A'C', *si le sommet* A *du premier triangle décrit une droite* L *parallèle à la base* B'C' *du second, le sommet* A' *du second triangle décrira une droite* L' *parallèle à la base* BC *du premier.*

En effet, soit A une position quelconque, sur la droite L, du sommet du premier triangle; si, par la position correspondante A' du sommet du second triangle, on mène la parallèle A'L' à BC, le point D' où cette parallèle coupera B'C' devra, d'après le théorème précédent, diviser la base B'C' dans un rapport constant. Donc ce point D' restera fixe quand le point A se déplacera sur la droite L; par suite, le point A' restera sur la parallèle L' menée par le point fixe D' à la base immobile BC.

5. Nous supposerons connus du lecteur les tracés usuels relatifs aux figures homologiques ([1]).

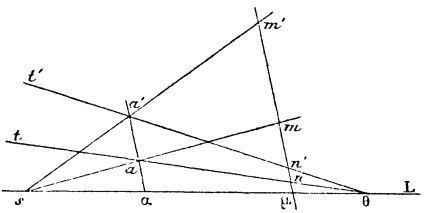
Toutefois nous croyons devoir ajouter ici quelques mots sur le cas important où le *centre d'homologie est à l'infini* dans une direction donnée. Un couple (a, a') de points homologues suffit pour indiquer cette *direction homologique;* L désignant l'*axe d'homologie,* on obtient alors l'homologue m' d'un point quelconque m de la première figure Σ en prenant l'intersection de la parallèle $m\mu$ à aa' et de l'homologue sa' de la droite sa qui joint le point m au point a (*fig.* 3). La proportion évidente

$$\frac{\mu m'}{\mu m} = \frac{\alpha a'}{\alpha a}$$

([1]) *Voir* le *Traité de Géométrie* de MM. E. Rouché et de Comberousse (5e édition, nos 728, 729 et 730)

prouve que le rapport $\frac{\mu m'}{\mu m}$ est constant, en sorte qu'on déduit la seconde figure Σ' de la première Σ en dilatant dans un rapport constant, qu'on nomme *rapport d'homologie,* les ordonnées αa, ..., μm, ..., comptées à partir de l'axe d'homologie L parallèlement à la direction homologique.

Fig. 3.



On peut même donner un peu plus d'extension à cette règle en comptant les ordonnées parallèles à la direction homologique à partir d'une droite quelconque $t\theta$ pour la première figure Σ pourvu que l'on compte les ordonnées de la seconde figure Σ' à partir de la droite $t'\theta$ homologue de $t\theta$; car, si n et n' désignent les points où $t\theta$ et $t'\theta$ rencontrent $\mu mm'$, les rapports

$$\frac{\mu m'}{\mu m}, \quad \frac{\mu n'}{\mu n}$$

étant égaux l'un et l'autre au rapport ρ d'homologie, il en sera de même du rapport

$$\frac{\mu m' - \mu n'}{\mu m - \mu n} \quad \text{ou} \quad \frac{n'm'}{nm}.$$

Axe commun a deux polygones funiculaires d'un même système de forces.

6. *Si l'on considère deux polygones funiculaires quelconques relatifs à un même système de forces, les*

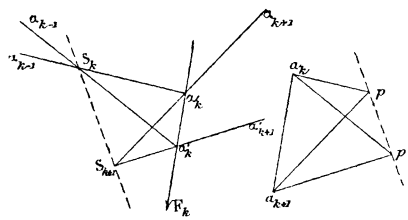
points où les côtés du premier rencontrent respectivement les côtés homologues du second sont situés sur une même droite.

Cette ligne, que nous nommerons l'*axe commun aux deux polygones, est parallèle à la droite qui joint les deux pôles et est située à distance finie, si les deux polygones ont des pôles distincts; elle est à l'infini, si les deux polygones ont le même pôle.*

Le théorème est évident dans le dernier cas; car, lorsque les deux polygones funiculaires ont le même pôle, deux côtés homologues quelconques sont parallèles entre eux.

Il suffit donc de s'occuper du premier cas. Désignons les deux polygones funiculaires par P et P′ et leurs pôles respectifs par p et p'; appelons en général S_k l'intersection des deux côtés $\alpha_{k-1}\alpha_k$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$ de rang k, les-

Fig. 4.



quels sont respectivement parallèles aux rayons polaires pa_k, $p'a_k$; d'ailleurs α_k et α'_k sont situés sur la ligne d'action de la force F_k dont le vecteur est $a_k a_{k+1}$. Considérons les deux triangles $a_k pp'$, $S_k \alpha_k \alpha'_k$; le côté $a_k p$ est parallèle à $S_k a_k$ et le côté $a_k p'$ est parallèle à $S_k \alpha'_k$. Si, les bases pp', $\alpha_k \alpha'_k$ restant fixes, les sommets a_k et S_k se déplacent de manière que les côtés qui étaient d'abord parallèles conservent leur parallélisme, $a_{k+1} pp'$

et $S_{k+1}\alpha_k\alpha'_k$ seront deux autres positions correspondantes des triangles variables. Mais le déplacement $a_k a_{k+1}$ du sommet du premier étant parallèle à la base $\alpha_k\alpha'_k$ du second, il faut (n° 4) que le déplacement $S_k S_{k+1}$ du sommet du second soit parallèle à la base pp' du premier. Ainsi tous les segments $S_1 S_2$, $S_2 S_3$, ..., $S_n S_{n+1}$ sont parallèles à pp', et, comme chacun d'eux a un point commun avec le suivant, tous ces segments sont sur une même droite parallèle à pp'. D'ailleurs cette droite est à distance finie; car, puisque les pôles p et p' ne sont pas situés sur les côtés (indéfiniment prolongés) du polygone des vecteurs, de deux sommets consécutifs a_k, a_{k+1} de ce polygone, l'un au moins, a_k par exemple, n'est pas en ligne droite avec pp'; les rayons polaires pa_k, $p'a_k$ sont dès lors distincts, et par suite les côtés $\alpha_{k-1}\alpha_k$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$, qui sont respectivement parallèles à ces rayons, se rencontrent en un point S_k situé à distance finie.

7. Ce théorème facilite le tracé des polygones funiculaires satisfaisant à certaines conditions. Voici un exemple :

Étant donné un polygone funiculaire $P\omega\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, *de pôle* p, *pour un système de forces*

$$(F_1, F_2, F_3, F_4;\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

construire pour ce même système de forces un second polygone funiculaire P', *de pôle donné* p', *et dont un côté de rang assigné, le second, par exemple, passe par un point donné* I.

On aura d'abord le second côté $\alpha'_1\alpha'_2$ du polygone P' en menant par I la parallèle au rayon polaire pa_2; on en déduira le point S_2, intersection des deux seconds côtés,

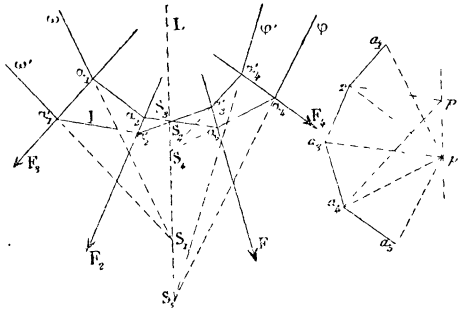
et enfin l'axe L commun aux deux polygones P et P′ en menant par S_2 la parallèle à pp'.

Cela fait, au lieu de construire le polygone P′ d'après la définition même du n° 2, on pourra employer l'axe L :

Soit pour tracer immédiatement un côté de rang assigné; on obtiendra, par exemple, le quatrième $\alpha'_3\alpha'_4$ en menant, par le point S_4 où l'axe L rencontre $\alpha_3\alpha_4$, une parallèle au rayon $p'a_4$;

Soit pour tracer les côtés successifs du polygone P′ sans faire intervenir le polygone des vecteurs; en pre-

Fig. 5.



nant, en effet, les points S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 où l'axe L rencontre les côtés $\omega\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\varphi$ du polygone P, on aura de proche en proche les côtés correspondants $\omega'\alpha'_1$, $\alpha'_2\alpha'_3$, $\alpha'_3\alpha'_4$, $\alpha'_5\varphi'$ en menant successivement $S_1\alpha'_1$, $S_3\alpha'_2$, $S_4\alpha'_3$, $S_5\alpha'_4$.

Lieu du point de rencontre de deux cotés de rangs assignés.

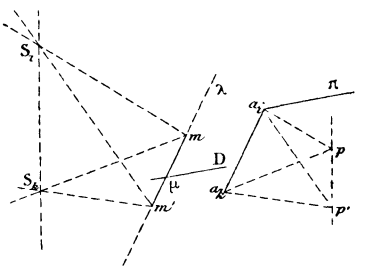
8. *Si, dans chacun des polygones funiculaires (en nombre infini) qui sont relatifs à un même système de forces, on prend le point de rencontre du côté de rang*

i et du côté de rang k, le lieu de ces points est une droite parallèle à la corde $a_i a_k$ qui, dans le polygone des vecteurs, joint l'origine du côté de rang i à l'origine du côté de rang k.

En effet, soient P et P′ deux polygones funiculaires quelconques du système; p et p' leurs pôles; S_i l'intersection des deux côtés de rang i, et S_k l'intersection des deux côtés de rang k; enfin m l'intersection des côtés de rang i et k dans le polygone P et m' l'intersection des côtés de rangs i et k dans le polygone P′; m et m' seront deux points quelconques du lieu et ils seront à distance finie, si, a_i et a_k étant distincts comme le suppose l'énoncé, la droite indéfinie pp' ne passe ni par a_i ni par a_k.

Considérons les triangles pa_ia_k, mS_iS_k; le côté pa_i est parallèle à mS_i et le côté pa_k parallèle à mS_k. Si, les bases a_ia_k, S_iS_k restant fixes, les sommets p et m se déplacent de manière que les côtés d'abord parallèles conservent leur parallélisme, $p'a_ia_k$ et $m'S_iS_k$ seront deux autres positions correspondantes des triangles variables. Mais le déplacement pp' du sommet du premier

Fig. 6.



étant parallèle à la base S_iS_k du second (n° 6), il faut (n° 4) que le déplacement mm' du sommet du second soit parallèle à la base a_ia_k du premier. Ainsi la droite

qui joint deux points quelconques m et m' du lieu est parallèle à $a_i a_k$; donc tout point m du lieu est sur la droite λ menée par l'un d'eux m' parallèlement à $a_i a_k$. Inversement tout point μ de cette droite λ appartient au lieu; car, si l'on désigne par D une droite quelconque passant par μ et distincte de λ, et si l'on considère un polygone funiculaire du système ayant cette droite pour côté de rang i et un pôle ϖ différent de a_i, le côté de rang k dans ce polygone coupera la droite D en un point appartenant au lieu et par conséquent situé sur λ; or μ est le seul point commun aux droites D et λ; donc μ appartient au lieu.

9. On dit que le polygone des vecteurs d'un système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ est *fermé* lorsque son origine a_1 et son extrémité a_{n+1} coïncident.

Un polygone funiculaire est dit *fermé* lorsque le premier côté $\omega\alpha_1$ et le dernier $\alpha_n\varphi$ coïncident avec la droite $\alpha_1\alpha_n$ qui joint le premier au dernier sommet.

Quand le polygone des vecteurs d'un système de forces est ouvert, on peut rencontrer parmi les polygones funiculaires du système les trois types : polygone fermé, ou polygone ouvert et ayant le premier et le dernier côté soit parallèles, soit concourants. Un exemple suffit pour mettre le fait hors de doute. Que l'on considère deux forces concourantes F_1 et F_2, si l'on prend le pôle hors de la droite $a_1 a_3$ qui joint l'origine à l'extrémité du polygone $a_1 a_2 a_3$ des vecteurs, on a évidemment un polygone funiculaire ouvert dont le premier et le dernier côté sont concourants; si l'on place au contraire le pôle sur $a_1 a_3$, le premier et le dernier côté du polygone funiculaire seront coïncidants ou parallèles suivant qu'on fera ou non passer le premier côté par le point de concours des deux forces.

Mais, *quand le polygone des vecteurs d'un système de forces* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *est fermé, si un polygone funiculaire du système est fermé, tous les polygones funiculaires du système sont fermés.*

En effet, si le polygone des vecteurs $a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ est fermé, c'est que a_{n+1} coïncide avec a_1; a_1 et a_n sont donc deux points distincts et $a_1 a_n$ est parallèle à F_n. Or, le polygone des vecteurs étant fermé, dans tout polygone funiculaire du système le dernier côté $\alpha_n \varphi$ aura la même direction que le premier $\omega\alpha_1$ et, pour qu'un tel polygone funiculaire soit fermé, il faut et il suffit que le premier côté $\omega\alpha_1$ et l'avant-dernier $\alpha_{n-1}\alpha_n$, c'est-à-dire le $n^{\text{ième}}$, concourent sur F_n. Mais, si cela a lieu pour l'un des polygones funiculaires, la droite F_n, qui est, avons-nous dit, parallèle à $a_1 a_n$, sera (n° 34) le lieu des points de rencontre du premier et du $n^{\text{ième}}$ côté des divers polygones funiculaires du système; tous ces polygones sont donc fermés.

Il suit de là que, *si le polygone des vecteurs d'un système de forces est fermé et si l'un des polygones funiculaires du système est ouvert, tous les polygones funiculaires du système seront ouverts.*

Observons encore que, *dans le cas particulier d'un système de forces concourantes, si le polygone des vecteurs est fermé, tous les polygones funiculaires sont fermés.* En effet, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que la chose a lieu pour un polygone funiculaire du système. Or, si l'on fait passer le premier côté d'un polygone funiculaire par le point de concours des forces, ce polygone se réduit évidemment à la droite menée par ce point de concours parallèlement au premier rayon polaire.

10. Revenons maintenant au théorème du n° 8.

Nous avons supposé a_i et a_k distincts; car, *lorsque* a_i *et* a_k *se confondent,* la direction $a_i a_k$ n'est plus déterminée et l'énoncé n'a plus de sens. Mais *quel est alors le lieu des points de rencontre des côtés de rangs i et k?*

Considérons le système partiel formé par les forces F_i, F_{i+1}, ..., F_{k-1}; la ligne brisée $a_i a_{i+1} \ldots a_k$ est le polygone des vecteurs de ce système partiel, et, si $\omega\alpha_1 \ldots \alpha_n \varphi$ est un polygone funiculaire du système total $F_1 \ldots F_n$, $\alpha_{i-1}\alpha_i \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k$ sera un polygone funiculaire du système partiel $F_i F_{i+1} \ldots F_{k-1}$. Dans notre hypothèse le polygone des vecteurs $a_i a_{i+1} \ldots a_k$ est fermé, puisque a_i et a_k se confondent; donc, si l'on considère tous les polygones funiculaires du système, *les côtés* $\alpha_{i-1}\alpha_i$, et $\alpha_{k-1}\alpha_k$ *seront soit toujours parallèles et distincts, soit toujours confondus.* Le tracé d'un polygone funiculaire d'essai montrera quel est celui des deux cas dans lequel on se trouve.

Dans le premier cas, le lieu est évidemment la droite de l'infini du plan. Dans le second cas, tout point m du plan appartient au lieu; car, si l'on construit un polygone funiculaire du système en faisant passer son côté $\alpha_{i-1}\alpha_i$ de rang i par m, le côté $\alpha_{k-1}\alpha_k$ de rang k, coïncidant avec $\alpha_{i-1}\alpha_i$, passera aussi par m.

Lieu des poles des polygones funiculaires passant par deux points donnés.

11. *Si, parmi les polygones funiculaires d'un système de forces, on considère seulement ceux dont deux côtés de rangs assignés i et k passent respectivement par deux points donnés* I *et* K, *le lieu des pôles de ces polygones est une ligne droite parallèle à* IK.

Cherchons un point a du lieu qui soit situé sur une

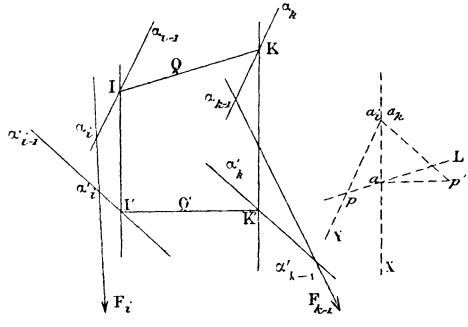
droite déterminée a_kY et menée d'ailleurs à volonté par le point a_k.

Supposons qu'on ait déjà tracé un polygone funiculaire quelconque P′ du système de forces considéré

$$(F_1 \ldots F_n;\ a_1 \ldots a_{n+1}),$$

et soit p' son pôle. Désignons par X une droite qui n'est autre que $a_i a_k$ lorsque les points a_i et a_k sont distincts, mais qui, si a_i et a_k sont confondus, est une droite menée à volonté par a_i. Traçons des parallèles à X par les points I et K jusqu'à leurs rencontres respectives I′ et K′ avec les côtés $\alpha'_{i-1}\alpha'_i$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$ de rangs i et k dans le polygone funiculaire P′; enfin, par p', menons la parallèle à I′K′ et prenons son intersection a avec X. Soient f_1 et f_2 deux forces ayant, la première pour vecteur $a_i a$ et pour ligne d'action II′, la seconde pour vecteur aa_k et pour ligne d'action KK′ et considérons le système de forces $(f_1 F_i F_{i+1} \ldots F_{k-1} f_2;\ aa_i \ldots a_k a)$. Le polygone Q′I′$\alpha'_i \ldots \alpha'_{k-1}$K′Q′ est un polygone funiculaire,

Fig. 7.



de pôle p', pour ce système de forces, et comme il est fermé ainsi que le polygone des vecteurs, tout autre polygone funiculaire du même système de forces sera

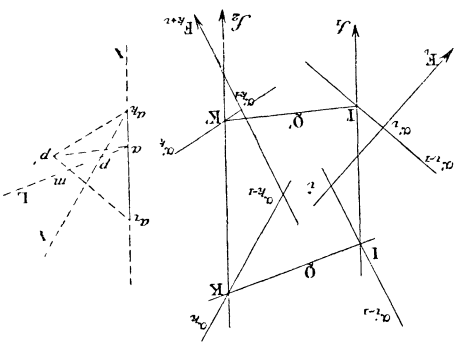
fermé; donc, en particulier, celui P_1 de ces polygones qui, ayant pour pôle p, aurait son premier côté passant par I. Mais les côtés de ce polygone P_1, autres que le premier et le dernier, seraient précisément les côtés $\alpha_{i-1}\alpha_i, \ldots, \alpha_{k-1}\alpha_k$ du polygone P; donc, puisque P_1 doit être fermé, son premier et son dernier côté se confondent avec IK; par suite, pa est parallèle à IK, en sorte qu'on obtient le point p en menant par le point connu a la parallèle à IK et prenant l'intersection de cette droite avec a_kY.

Ainsi tout point p du lieu se trouve sur la droite L menée par le point a parallèlement à IK.

D'ailleurs, tout point m de cette droite appartient au lieu; car, puisque, en vertu du raisonnement ci-dessus, il y a, sur chaque droite issue de a_k, un seul point du lieu, le point du lieu qui est sur $a_k m$, devant en même temps appartenir à L, coïncide avec m.

En définitive, le lieu cherché est une droite parallèle à IK et passant par un point a qu'on détermine par la règle suivante :

Fig. 8.



Tracez un polygone funiculaire quelconque P′ *du système de forces proposé* (s'il s'en trouve un déjà

tracé sur la figure, il convient évidemment d'en profiter); *prenez les points* I′ *et* K′ *où les côtés de rangs i et k rencontrent respectivement les parallèles menées par* I *et* K *à une droite* X, *qui est la droite* $a_i a_k$ *si* a_i *et* a_k *sont distincts, ou une droite menée à volonté par* a_i *si* a_i *et* a_k *se confondent; enfin, par le pôle du polygone auxiliaire* P′ *menez la parallèle à* I′K′: *cette parallèle rencontrera la droite* X *au point cherché* a.

La *fig.* 8 est relative au cas où les points a_i et a_k sont distincts; la *fig.* 7 se rapporte au cas où ces points sont confondus, alors les côtés $\alpha'_{i-1}\alpha'_i$, $\alpha'_{k-1}\alpha'_k$ de rangs i et k dans le polygone auxiliaire P′ ont la même direction $p'a_i$. Nous avons supposé ces deux côtés distincts; s'ils se confondent, la droite I′K′ se confond avec eux, et la droite $p'a$, devenant $p'a_i$, le point a ne diffère pas de a_i; dans ce cas, le lieu est donc la parallèle à IK, menée par les points confondus a_i et a_k.

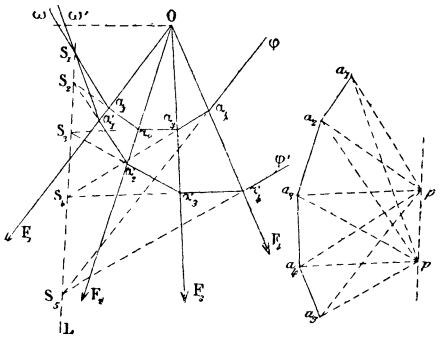
Propriétés spéciales des polygones funiculaires relatifs a un système de forces concourantes ou parallèles.

12. *Deux polygones funiculaires quelconques* P *et* P′ *d'un même système de forces concourantes sont deux figures homologiques;* en d'autres termes, si Σ est une figure quelconque dont le polygone P fait partie, et si l'on construit la figure Σ′ homologique de Σ en prenant pour centre d'homologie le point de concours O des forces et pour axe d'homologie l'axe commun L (n° 6) aux deux polygones P et P′, le polygone P′ sera la partie de Σ′ qui est l'homologue de P (*fig.* 9).

En effet, prenons respectivement sur les deux premiers côtés $\omega\alpha_1$ et $\omega\alpha'_1$ des polygones funiculaires P et

P′ deux points ω et ω′ en ligne droite avec le point O. Puis avec le centre d'homologie O, l'axe d'homologie L et le couple (ω, ω′) de points homologues, construisons la figure Σ′ homologique de Σ; l'homologue du premier côté $\omega\alpha_1$ de P sera le premier côté $\omega'\alpha'_1$ de P′, puisque

Fig. 9.



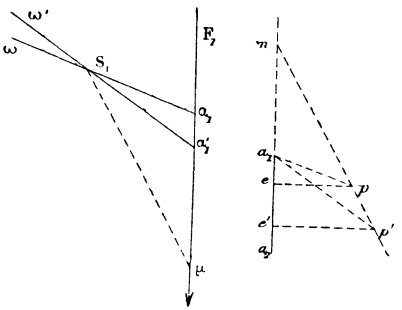
$\omega'\alpha'_1$ passe par ω′ homologue de ω et coupe l'axe L au même point S_1 que $\omega\alpha_1$. D'ailleurs l'homologue du sommet α_1 de P devant être à la fois sur $O\alpha_1$ et sur $\omega'\alpha'_1$ sera précisément le sommet α'_1 de P′. Dès lors on voit de même que $\alpha'_1\alpha'_2$ est l'homologue de $\alpha_1\alpha_2$ et que α_2 est l'homologue de α'_2; et ainsi de suite.

13. Lorsque les deux polygones funiculaires P et P′ sont relatifs à des forces parallèles, le centre d'homologie passe à l'infini dans la direction des forces. Il est d'ailleurs aisé de voir que le rapport d'homologie est alors égal en grandeur et en signe au rapport des distances polaires ep, $e'p'$ (*fig.* 10).

En effet, soit m l'intersection de a_1a_2 et de pp', S_1 l'intersection de $\omega\alpha_1$ et de $\omega'\alpha'_1$, enfin μ le point où $\alpha_1\alpha'_1$ coupe l'axe commun aux deux polygones, c'est-

à-dire la parallèle menée par S_1 à pp'; les deux triangles pa_1p', $\alpha_1 S_1 \alpha'_1$ se trouvent dans les conditions du n° 3, les côtés a_1p et $S_1\alpha_1$ sont parallèles, ainsi que les côtés a_1p' et $S_1\alpha'_1$, et la droite a_1m est menée par le sommet

Fig. 10.



du premier parallèlement à la base $\alpha_1\alpha'_1$ du second, tandis que la droite $S_1\mu$ est menée par le sommet du second parallèlement à la base pp' du premier; on a donc, en grandeur et en signe,

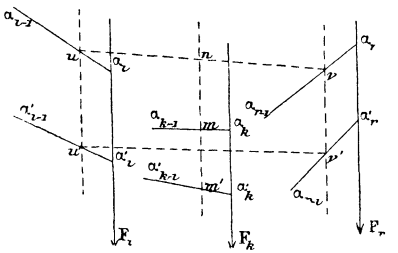
$$\frac{\mu\alpha'_1}{\mu\alpha_1} = \frac{mp}{mp'} = \frac{ep}{ep'};$$

ce qui démontre le fait énoncé, puisque la droite $S_1\mu$ étant l'axe d'homologie et (α_1, α'_1) étant un couple de points homologues, le premier des rapports ci-dessus exprime le rapport d'homologie. Ainsi :

Deux polygones funiculaires quelconques P *et* P' *d'un même système de forces parallèles sont deux figures homologiques, dont les rayons homologiques sont parallèles aux lignes d'action des forces, dont l'axe d'homologie est l'axe commun aux deux polygones et dont le rapport d'homologie est égal au rap-*

port inverse des distances polaires. Ce rapport est d'ailleurs égal à celui des ordonnées de deux points homologues quelconques m et m' des deux polygones,

Fig. 11.



les ordonnées nm, n'm' étant parallèles aux forces et comptées respectivement à partir de deux droites homologues quelconques uv, et u'v' des deux figures (fig. 11).

Polygone funiculaire passant par trois points donnés.

14. *Etant donnés trois points quelconques* I, H, K *dans le plan d'un système de forces*

$$(F_1 F_2 \ldots F_n;\ a_1 a_2 \ldots a_{n+1}).$$

on demande de tracer le polygone funiculaire P *dont le côté de rang i passerait par* I, *le côté de rang h par* H *et le côté de rang k par* K.

Il suffit évidemment de trouver le pôle p du polygone demandé P.

Or ce pôle p appartient au lieu des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang i passerait par I et le côté de rang h par H; il appartient aussi au lieu des pôles des polygones funiculaires dont le côté de

rang h passerait par H et le côté de rang k par K; on sait (n° 11) construire ces deux lieux qui sont des droites respectivement parallèles à IH et HK; l'intersection de ces deux droites sera le point cherché p.

On pourrait d'ailleurs à l'un de ces deux lieux substituer celui des pôles des polygones funiculaires dont le côté de rang i passe par I et le côté de rang k par K, et obtenir de la sorte une vérification.

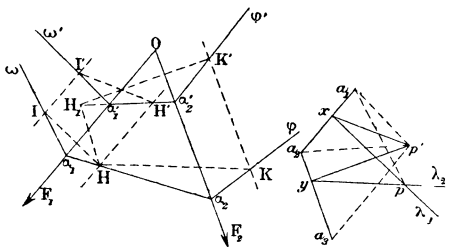
Telle est la méthode générale. Mais, si les forces sont concourantes ou parallèles, il vaut mieux recourir aux propriétés spéciales des n°s 12 et 13. On a alors par le point de concours ou par la direction des forces le centre d'homologie ou la direction homologique des polygones funiculaires du système. Donc, en prenant les intersections respectives des rayons homologiques des points I, H, K et des côtés de rangs i, h, k dans un premier polygone d'essai P′, on aura immédiatement les homologues I′, H′, K′ des points I, H, K du polygone demandé P; on pourra alors trouver tous les côtés de ce polygone P, même indépendamment les uns des autres, à l'aide des tracés indiqués au n° 7.

15. Tout cela est si facile qu'un exemple suffira. Nous choisirons à cet effet le système de deux forces concourantes (F_1, F_2; $a_1 a_2 a_3$) auquel nous appliquerons successivement les deux méthodes; le premier côté devra passer par I, le deuxième par H et le troisième par K.

La *fig.* 12 est relative à la première méthode; $\omega'\alpha'\alpha'_1\varphi'$ est un polygone d'essai dont p' est le pôle. En menant H′ et HH′ parallèles à $a_1 a_2$, puis par p' la parallèle $p'x$ à I′H′ et enfin par x la parallèle à I′H′, on a (n° 11) le lieu λ_1 des pôles des polygones funiculaires dont le premier côté passe par I et le second par H. De même en

menant HH_1 et KK' parallèles à a_2a_3, puis par p' la parallèle $p'y$ à H'_1K' et enfin par y la parallèle à HK, on a le lieu λ_2 des pôles des polygones funiculaires dont le deuxième côté passe par H et le troisième par K.

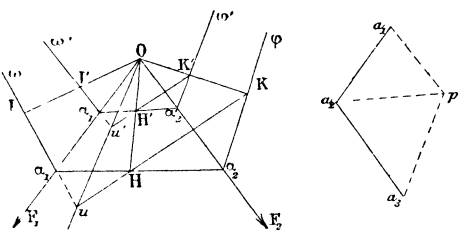
Fig. 12.



Le point p commun à λ_1 et λ_2 sera le pôle du polygone cherché P; son premier côté sera la parallèle $\omega\alpha_1$ à pa_1 menée par I; puis, α_1H et α_2K seront les côtés suivants; comme vérification, ces côtés doivent être respectivement parallèles aux rayons polaires pa_2 et pa_3 que nous n'avons pas tracés pour ne pas compliquer inutilement la figure.

La *fig.* 13 est relative à la seconde méthode; $\omega'\alpha'_1\alpha'_2\varphi'$

Fig. 13.



étant toujours un polygone d'essai dont le pôle p' est arbitraire, on prendra les intersections I', H', K' de ses côtés successifs avec les rayons homologiques OI, OH,

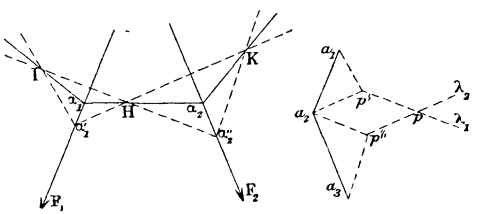
OK, et il restera, pour avoir le polygone demandé P, à construire la figure homologique de $\omega'\alpha'_1\alpha'_2\varphi'$.

L'homologue u du point u' où $\omega'\alpha'_1$ coupe $H'K'$ sera sur Ou' et sur HK; en le joignant au point I, on aura la droite homologue de $I'u'$, c'est-à-dire le premier côté $\omega I\alpha_1$ du polygone P dont le deuxième côté sera $\alpha_1 H\alpha_2$ et le troisième $\alpha_2 K\varphi$.

16. L'une et l'autre construction peuvent être notablement abrégées par un choix convenable du polygone d'essai P', si un tel polygone ne se trouve pas tracé déjà pour d'autres besoins.

Reprenons à ce point de vue la première méthode. En prolongeant KH (*fig.* 14) jusqu'à sa rencontre α'_1 avec

Fig. 14.

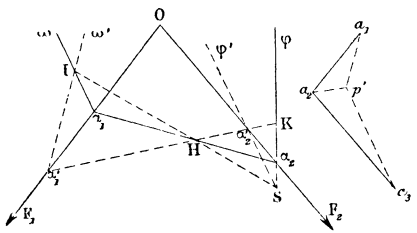


F_1, on peut considérer $I\alpha'_1$ et $\alpha'_1 H$ comme le premier et le second côté d'un polygone funiculaire dont le premier côté passerait par I et le second par H; son pôle p' s'obtiendra en menant a_1p' et a_2p' respectivement parallèles à $I\alpha'_1$ et à HK, et la parallèle λ_1 menée par p' à IH sera le lieu des pôles des polygones funiculaires ayant leur premier côté passant par I et leur second par H. De même, en prolongeant IH jusqu'à sa rencontre α''_2 avec F_2, on peut considérer $H\alpha''_2$ et $\alpha''_2 K$ comme le deuxième et le troisième côté d'un polygone funiculaire dont le deuxième côté passerait par H et le troisième par

K; son pôle p'' s'obtiendra en menant a_2p'' et a_3p'' respectivement parallèles à IH et à α''_2K, et la parallèle λ_2 menée par p'' à HK sera le lieu des pôles des polygones funiculaires ayant leur deuxième côté passant par H et le troisième par K. Donc l'intersection de λ_1 et de λ_2, c'est-à-dire le sommet p opposé à a_2 dans le parallélogramme $a_2p'pp''$ sera le pôle du polygone cherché P. On aura le deuxième côté $\alpha_1\alpha_2$ en menant par H la parallèle à pa_2; puis Iα_1 et α_2K seront le premier et le troisième.

Reprenons de même la seconde méthode : En prolongeant KH jusqu'à sa rencontre α'_1 avec F_1, Iα'_1 et

Fig. 15.



α'_1Hα'_2 seront les deux premiers côtés d'un polygone funiculaire dont le premier côté passe par I et le second par H; son pôle p' s'obtiendra en menant a_1p et a_2p respectivement parallèles à Iα'_1 et à HK, et l'on aura le troisième côté $\alpha'_2\varphi'$ en menant par α'_2 la parallèle à $p'a_3$; mais le polygone $\omega'\alpha'_1\alpha'_2\varphi'$ et le polygone cherché P ont évidemment pour axe d'homologie la droite IH qui est leur axe commun; donc, il suffira de prolonger $\varphi'\alpha'_2$ jusqu'à sa rencontre S avec IH et de joindre SK pour avoir le dernier côté $\alpha_2\varphi$ du polygone P; le second côté sera ensuite α_2Hα_1 et le premier α_1I (*fig.* 15).

La construction que nous trouvons ainsi par la considération des figures homologiques aussi bien que la

précédente sont remarquables par leur élégante simplicité.

Polygone funiculaire passant par deux points donnés et ayant une distance polaire donnée.

17. Après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, il suffira de quelques mots sur ce nouveau problème :

Étant donnés deux points quelconques I *et* H *dans le plan d'un système de forces*

$$(F_1 F_2 \ldots F_n;\ a_1 a_2 \ldots a_{n+1}),$$

on demande de tracer un polygone funiculaire P *dont le côté de rang i passe par* I, *le côté de rang h par* H *et dont le pôle p soit à une distance donnée* δ *de la droite qui, dans ce polygone des vecteurs, joint le point* a_i *au point* a_h.

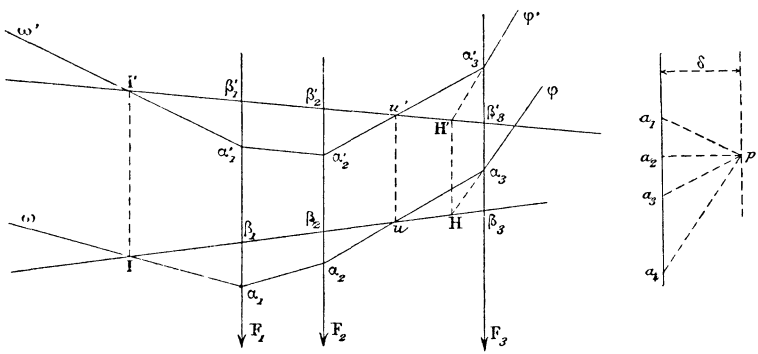
Le pôle inconnu p doit être d'abord sur l'une des deux parallèles à $a_i a_h$ situées de part et d'autre et à la distance δ de cette droite. Il doit être en outre sur la droite lieu des pôles des polygones funiculaires dont les côtés de rangs i et h passent respectivement par I et H. Cette droite coupe les deux premières en deux points p et p_1. Il y a donc deux solutions; la solution serait unique si l'on donnait, outre la valeur absolue δ de la distance polaire, le sens de cette distance.

Si les forces concourent en un même point O, on construira un polygone d'essai P′ en prenant un pôle p' à la distance δ de $a_i a_h$, portée d'ailleurs du côté convenable si le sens de la distance est donné. Les rayons homologiques OI, OH fourniront par leurs rencontres respectives avec les côtés de rangs i et h du po-

lygone P′ les points I′ et H′ homologiques de I et H; l'axe d'homologie des polygones P et P′ s'obtiendra en menant par le point de rencontre S de IH et I′H′ la parallèle SL à pp', c'est-à-dire la parallèle à $a_i a_h$; on aura donc plus de données qu'il n'en faut pour construire le polygone P homologique de P′.

18. La solution par les figures homologiques devient d'une extrême simplicité dans le *cas où les forces sont parallèles*. Soit, pour fixer les idées, le système de trois forces parallèles ($F_1 F_2 F_3$; $a_1 a_2 a_3 a_4$) et supposons qu'on veuille que le premier côté du polygone funiculaire

Fig. 16.



demandé P passe par I et le dernier côté par H. On construira un polygone funiculaire d'essai P′ ou $\omega' \alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3 \varphi'$ à l'aide d'un pôle p' qui soit à la distance donnée δ de $a_1 a_4$ et dans le sens voulu; puis on mènera par I et H des parallèles aux forces jusqu'aux points d'intersection de ces rayons homologiques avec le premier côté $\omega' \alpha'_1$ et le dernier côté $\alpha'_3 \varphi$ du polygone P′; ces points d'intersection I′ et H′ seront les homologues de I et K. Mais les polygones P et P′ ayant leur rapport

d'homologie égal à l'unité (n° 13) puisque leurs distances polaires sont égales et de même sens, les ordonnées correspondantes comptées respectivement à partir des droites homologues IH, I'H' seront égales et de même signe. Il suffira donc, pour avoir le polygone I', de prendre $\beta_1\alpha_1$, $\beta_2\alpha_2$, $\beta_3\alpha_3$ respectivement égales à $\beta'_1\alpha'_1$, $\beta'_2\alpha'_2$, $\beta'_3\alpha'_3$ et de même sens. Des vérifications simples peuvent d'ailleurs être fournies par les rencontres telles que u', des côtés du polygone P' avec I'H'; les côtés homologues du polygone P devront rencontrer IH en des points homologues, c'est-à-dire situés avec les premiers sur une parallèle aux forces.