Concours pour l'agrégation des sciences mathématiques (1887)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 433-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__433_1>

CONCOURS POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1887).

Mathématiques élémentaires.

On donne deux cercles S et Σ ayant pour centres les points O et ω, pour rayons r et ρ; le cercle S est supposé intérieur au cercle Σ, et le point ω intérieur au cercle S :

1° Démontrer que tous les cercles T tangents extérieurement au cercle S et orthogonaux au cercle Σ touchent un troisième cercle fixe;

2° On prend une droite DD' perpendiculaire à la ligne des centres ωO, et un point P sur cette ligne des centres. Soient ωA, ωB les tangentes menées du point ω à l'un des cercles T, A' et B' les points d'intersection de la droite DD' avec les bissectrices des angles $A\omega O$ et $B\omega O$; démontrer que les points A' et B' forment deux divisions homographiques quand le cercle T varie;

3° Étudier les variations de l'angle A'PB';

4° Soient $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ une suite de cercles T orthogonaux au cercle Σ, le premier aux points A_1 et A_2, le second aux points A_2 et A_3, le troisième aux points A_3 et $A_4, \ldots$, le $n^{\text{ième}}$ aux points A_n et A_{n+1}; démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le point A_{n+1} coïncide avec le point A_1 est que l'on puisse satisfaire à une relation de la forme

$$\operatorname{tang} \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2r\rho}\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2},$$

le nombre k étant entier, et d désignant la distance ωo.

Mathématiques spéciales.

1° Démontrer que le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique S soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées du même point à une autre conique S' est une troisième conique Σ qui passe par les points de contact A, B, C, D et A', B', C', D' des tangentes communes aux deux coniques S et S'.

2° Démontrer qu'il existe quatre circonférences de cercles réels passant chacune par deux des foyers de la conique S et deux des foyers de la conique S'.

3° Soient A et A' les points de contact des coniques S et S' avec une de leurs tangentes communes; démontrer que, si le point A' est la projection du centre de la conique S sur la tangente AA′, les normales à la conique S′ aux points B′, C′, D′ se coupent en un point M qui reste fixe quand le cercle Σ varie en passant constamment par les points A et A′.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Une surface étant définie par trois équations de la forme

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad z = F_3(u, v),$$

dans lesquelles x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, u et v des variables indépendantes :

1° Déterminer, en fonction de u et de v, les rayons de courbure principaux de la surface en un de ses points et les coordonnées des centres de courbure correspondants ;

2° Former, au moyen des mêmes variables, l'équation différentielle des lignes de courbure et celle des lignes asymptotiques.

Application. — Appliquer les résultats trouvés au cas où la surface est définie par les équations suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int(1-u^2)f(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\varphi(v)\,dv,\\ y &= \frac{i}{2}\int(1+u^2)f(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\varphi(v)\,dv,\\ z &= \int uf(u)\,du + \int v\varphi(v)\,dv. \end{aligned}\right.$$

3° Étudier en particulier les lignes de courbure de la surface représentée par les formules (A) dans le cas où l'on pose

$$f(u) = \frac{2m^2}{(m^2 + u^2)^2}, \qquad \varphi(v) = \frac{2m^2}{(m^2 + v^2)^2},$$

$$u = m \operatorname{tang} \frac{\lambda + \mu i}{2}, \qquad v = m \operatorname{tang} \frac{\lambda - \mu i}{2}.$$

Composition de Mécanique rationnelle.

Un solide homogène, non pesant, a la forme d'un cône de révolution dont le sommet est un point O; la hauteur OM de ce cône étant a, le rayon de sa base est $2a$. Ce solide peut tourner librement autour du point O, supposé fixe; chacun de ses éléments est attiré vers un point fixe F avec une intensité égale au produit d'une constante ω^2 par la masse de l'élément et par sa distance au point F. La longueur OF est égale à $\frac{8}{5}a$.

A l'instant initial, l'angle MOF est droit, l'axe instantané de rotation du solide coïncide avec la bissectrice de cet angle et la vitesse de rotation est $\omega\sqrt{2}$.

Cela posé, on demande de déterminer le mouvement ultérieur du solide et d'exprimer, en fonction de l'angle MOF, les composantes de la réaction exercée par le cône sur le point auquel est fixé son sommet.

Déterminer les cônes décrits par l'axe instantané de rotation dans le solide et dans l'espace; indiquer comment ils sont placés l'un par rapport à l'autre aux diverses époques du mouvement.

On montrera que les traces respectives H et H_1 de ces cônes sur les plans P, P_1, perpendiculaires, le premier à OM, le second à OF, sont des courbes du genre des herpolhodies. On cherchera les surfaces du second ordre qui, en se mouvant de manière à définir chacune un *mouvement de Poinsot* autour du point O, toucheraient les plans P et P_1 aux différents points des courbes H et H_1.

On rappelle que le mouvement d'un solide autour d'un point fixe peut être déterminé par les équations

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = L,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = M,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = N;$$

$$p = \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} + \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$q = - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} + \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}.$$