

CH. BIEHLER

**Sur une application de la méthode de Sturm**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 6  
(1887), p. 421-426

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1887\\_3\\_6\\_\\_421\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__421_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SUR UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE STURM;

PAR M. CH. BIEHLER.

---

La fonction  $\text{tang } x$  développée en fraction continue donne, comme l'on sait, le développement suivant

$$\text{tang } x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

Les réduites de cette fraction continue sont des quotients de polynômes entiers en  $x$ . Ces polynômes ont tous leurs zéros réels, et la démonstration de cette propriété par la méthode de Sturm donne lieu à une remarque qui offre quelque intérêt.

En formant les réduites successives de la fraction con-

tinue, on obtient

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{x}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3x}{1.3 - x^2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{1.3.5x - x^3}{1.3.5 - 6x^2},$$

.....

D'une manière générale, les polynômes P et les polynômes Q sont liés par la loi de récurrence

$$P_n = (2n - 1)P_{n-1} - x^2P_{n-2},$$

$$Q_n = (2n - 1)Q_{n-1} - x^2Q_{n-2}.$$

Ces relations s'appliquent même pour  $n = 2$ , si l'on fait les conventions

$$P_0 = 0, \quad Q_0 = 1.$$

Elles permettent de calculer aisément ces polynômes ; on a ainsi

$$P_1 = x,$$

$$P_2 = 1.3x,$$

$$P_3 = 1.3.5x - x^3,$$

$$P_4 = 1.3.5.7x - 10x^3,$$

$$P_5 = 1.3.5.7.9x - 105x^3 + x^5,$$

$$P_6 = 1.3.5.7.9.11x - 1260x^3 + 21x^5,$$

.....;

$$Q_1 = 1,$$

$$Q_2 = 1.3 - x^2,$$

$$Q_3 = 1.3.5 - 6x^2,$$

$$Q_4 = 1.3.5.7 - 45x^2 + x^4,$$

$$Q_5 = 1.3.5.7.9 - 420x^2 + 15x^4,$$

$$Q_6 = 1.3.5.7.9.11 - 4725x^2 + 210x^4 - x^6,$$

.....

On voit que  $P_{2n-1}$  et  $P_{2n}$  sont chacun de degré  $2n-1$ ,



elles présentent donc  $n - 1$  variations; l'équation  $P_{2n} = 0$  a donc aussi au moins  $(n - 1)$  racines réelles entre  $+\varepsilon$  et  $+\infty$ ; ceci résultait d'ailleurs aussi de ce que  $P_{2n}$  ne renferme que des puissances de  $x$  de même parité. L'équation  $P_{2n} = 0$  a donc au moins  $2(n - 1)$  racines réelles autres que zéro; elle admet aussi la racine zéro, et, comme elle n'est que de degré  $2n - 1$ , elle a toutes ses racines réelles.

Le même raisonnement s'applique à l'équation  $P_{2n-1} = 0$  qui est aussi de degré  $2n - 1$ ; il suffit de considérer la suite des fonctions

$$P_{2n-1}, P_{2n-2}, \dots, P_2, P_1,$$

qui ne présente plus qu'une seule fonction de degré  $2n - 1$ .

On voit, par ce qui précède, que le rapport  $\frac{P_{2n}}{P_{2n-1}}$  passe d'une valeur négative à une valeur positive lorsque  $x$ , en croissant, traverse une racine négative de l'équation  $P_{2n} = 0$ , et il passe d'une valeur positive à une valeur négative quand  $x$ , en croissant, traverse une racine positive de la même équation.

Cela tient à ce que, entre  $-\infty$  et zéro, la suite

$$P_{2n}, P_{2n-1}, P_{2n-2}, \dots, P_2, P_1$$

perd des variations et en gagne entre zéro et  $+\infty$ .

Il en sera ainsi chaque fois que des polynômes, tous de degré pair ou tous de degré impair, ne renfermant que des puissances de  $x$  de même parité, satisferont à des relations de Sturm.

Soit, pour fixer les idées, la suite des polynômes

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n},$$

qui sont les dénominateurs des réduites considérées.

Ces fonctions sont toutes de degré pair et ne renferment que des puissances paires de la variable.

$Q_{2n}$  est de degré  $2n$ ,  $Q_{2n-1}$  n'est que de degré  $2n - 1$ .  
Cherchons les signes des quotients

$$\frac{Q_{2n}(-a - \varepsilon)}{Q_{2n-2}(-a - \varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{2n}(a - \varepsilon)}{Q_{2n-2}(a - \varepsilon)},$$

$Q_{2n}(x)$  désignant le polynôme  $Q_{2n}$ ,  $-a$  et  $+a$  deux racines de l'équation  $Q_{2n}(x) = 0$ . On a

$$Q_{2n}(-a - \varepsilon) = -\varepsilon Q'_{2n}(-a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} Q''_{2n}(-a) + \dots$$

Pour une valeur de  $\varepsilon$  suffisamment petite,  $Q_{2n}(-a - \varepsilon)$  a le signe de  $-\varepsilon Q'_{2n}(-a)$ ;  $Q_{2n}(a + \varepsilon)$  a aussi le signe de  $-\varepsilon Q'_{2n}(a)$ , et  $Q_{2n-2}(-a - \varepsilon)$ ,  $Q_{2n-1}(a - \varepsilon)$  sont de mêmes signes; mais  $Q'_{2n}(-a)$  et  $Q'_{2n}(a)$  sont évidemment de signes contraires; donc

$$\frac{Q_{2n}(-a - \varepsilon)}{Q_{2n-2}(-a - \varepsilon)} \quad \text{et} \quad \frac{Q_{2n}(a - \varepsilon)}{Q_{2n-2}(a - \varepsilon)}$$

sont de signes contraires. Si donc le rapport  $\frac{Q_{2n}(x)}{Q_{2n-2}(x)}$  passe du négatif au positif quand  $x$ , en croissant, traverse une racine négative de  $Q_{2n}(x) = 0$ , il passera du positif au négatif quand  $x$ , en croissant, traverse une racine positive de la même équation.

Ces polynômes  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n-1}, Q_{2n}, \dots$  jouissent de propriétés analogues à celles des polynômes  $P$ ; les racines des équations  $Q_\mu = 0$  sont toutes réelles; on le montre comme on l'a fait pour les équations  $P_\mu = 0$ .

J'ai fait voir (*même Recueil*, t. XIX, 2<sup>e</sup> série) que le polynôme  $U_m$ , qui est le premier membre de l'équation qui donne  $\text{tang} \frac{\alpha}{m}$  lorsque  $\text{tanga}$  est donnée, est le premier terme d'une suite de Sturm qui jouit de propriétés analogues à celles des polynômes précédents;

mais  $U_m$  n'a pas, comme les précédents, ses termes tous de degrés pairs ou impairs, et les degrés des polynômes  $U_m, U_{m-1}, \dots$  ne décroissent que d'une unité quand on passe de l'un d'eux au suivant.

La démonstration précédente fait voir aussi que les racines des équations  $P_\mu = 0, Q_\mu = 0$  sont distinctes.

---