Nouvelles annales de mathématiques

Georges Maupin

Sur une question posée aux examens oraux d'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 419-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__419_1>

SUR UNE QUESTION POSÉE AUX EXAMENS ORAUX D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. GEORGES MAUPIN,
Élève en Mathematiques au lycée de Rennes.

On donne un paraboloïde hyperbolique équilatère et une ellipse dans un de ses plans directeurs. A cette ellipse on mène une tangente, et l'on considère une génératrice du paraboloïde qui lui soit perpendiculaire. Trouver le lieu de la perpendiculaire commune à la tangente et à la génératrice.

Je vais démontrer que ce lieu se compose :

1° D'un cylindre droit, ayant pour base une podaire de l'ellipse;

2° De deux paraboloïdes hyperboliques, égaux entre eux et égaux au paraboloïde donné;

3° Du plan de l'ellipse.

Soient ox, oy, oz trois axes rectangulaires; les plans yox et zox sont les plans directeurs du paraboloïde et o est le sommet. Il y a lieu de considérer successivement les génératrices qui sont parallèles au plan xoy et celles qui sont parallèles au plan zox; les premières rencontrent oz et les secondes s'appuient sur oy.

1° Si G est une génératrice parallèle à xoy, il y a toujours deux tangentes à l'ellipse qui sont perpendiculaires à G; soit T l'une quelconque d'entre elles. La perpendiculaire commune à G et à T est parallèle à oz; soit d'ailleurs g la projection de G sur xoy; le point m où elle coupe T est la trace de la perpendiculaire commune. Or le lieu du point m est la podaire de o par rapport à l'ellipse, c'est-à-dire une quartique. Donc le lieu de la perpendiculaire commune est le cylindre du quatrième ordre, admettant cette quartique comme directrice et ayant ses génératrices parallèles à oz.

2° Considérons maintenant une génératrice Γ parallèle à zox; supposons qu'il lui corresponde une tangente Θ de l'ellipse. L'angle formé par Γ et Θ a un côté dans le plan xoy : donc il se projette sur ce plan suivant un angle droit; et comme la projection γ à Γ est parallèle à ox. Θ sera perpendiculaire à ox.

Ainsi la tangente Θ est menée à l'ellipse parallèlement à oy. Il y a deux tangentes parallèles à oy, je les désignerai par Θ et Θ_1.

Cherchons le lieu correspondant à Θ; par le point où se coupent γ et Θ menons la perpendiculaire à Γ : cette droite sera la perpendiculaire commune P. Or supposons que le paraboloïde donné glisse parallèlement à lui-même, le long de ox, de manière que oy vienne s'appliquer sur Θ, puis qu'on lui imprime une rotation de 90° autour de Θ. On voit qu'après ce double mouvement la génératrice Γ sera confondue avec P, qu'à toute génératrice du paraboloïde correspondra ainsi une génératrice du lieu, ou qu'enfin le paraboloïde sera confondu avec le lieu de P.

Le lieu de P est donc un paraboloïde égal au premier:

il a pour plans directeurs xoz et zoy, et ox et Θ sont les génératrices qui passent par le sommet. De même le lieu correspondant à Θ est un troisième paraboloïde, qui se déduit du second en transportant celui-ci parallèlement à lui-même, le long de ox, jusqu'à ce que Θ soit venu en Θ_1.

3° Nous avons dit (2°) que les génératrices Γ se projettent parallèlement à ox; il y a exception pour la génératrice oz. Cette génératrice est projetée suivant le point o, elle est perpendiculaire à toutes les tangentes à c, et le lieu des perpendiculaires communes qui lui correspondent est le plan xoy.