H. LAURENT

Sur le calcul d'une fonction symétrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 416-419
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__416_0>

SUR LE CALCUL D'UNE FONCTION SYMÉTRIQUE;

PAR M. H. LAURENT.

Soient
$$\varphi(x) = 0$$
une équation algébrique de degré m et $\psi(x)$ une fonction entière de x de degré μ. Divisons $\psi(x)$ par $\varphi(x)$; soient q_1 le quotient, ψ_1 le reste. Divisons $x\psi_1$ par $\varphi(x)$; soient q_1 le quotient, ψ_2 le reste, etc. Divisons $x\psi_{m-1}$ par φ; soient q_m le quotient, ψ_m le reste. Soient enfin

$$\begin{gathered}
\psi_1 = a_{11}x^{m-1} + a_{12}x^{m-2} + \ldots + a_{2m}, \\
\psi_2 = a_{21}x^{m-1} + a_{22}x^{m-2} + \ldots + a_{2m}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\psi_m = a_{m1}x^{m-1} + a_{m2}x^{m-2} + \ldots + a_{mm}, \\
R = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{mm}.
\end{gathered}$$

On aura
$$\begin{gathered}
\psi(x) = q_1\varphi + \psi_1, \\
x\psi_1(x) = q_2\varphi + \psi_2, \\
\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x\psi_{m-1}(x) = q_m\varphi + \psi_m;
\end{gathered}$$
on en conclut
$$x^{j-1}\psi(x) = \lambda\varphi + \psi_j(x),$$

λ désignant un polynôme entier, et par suite, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines de $\varphi(x) = 0$,

$$(1) \qquad \alpha_i^{j-1}\psi(\alpha_i) = \psi_j(\alpha_i):$$

si donc on pose

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_m \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \alpha_3^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1}
\end{vmatrix} = \Lambda,$$

A sera le produit des différences des racines de $\varphi = 0$ et l'on aura

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \psi(\alpha_1) & \psi(\alpha_2) & \ldots & \psi(\alpha_m) \\ \alpha_1\,\psi(\alpha_1) & \alpha_2\,\psi(\alpha_2) & \ldots & \alpha_n\,\psi(\alpha_m) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^{m-1}\,\psi(\alpha_1) & \alpha_2^{m-1}\,\psi(\alpha_2) & \ldots & \alpha_m^{m-1}\,\psi(\alpha_m) \end{vmatrix} = \mathrm{A}\,\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_n).$$

Or on a

$$\psi_j(\alpha_i) = a_{j1}\alpha_i^{m-1} + a_{j2}\alpha_i^{m-2} + \ldots + \alpha_{jn}:$$

donc, en vertu de (1),

$$\alpha_i^{j-1}\,\psi(\alpha_i) = a_{j1}\alpha_i^{m-1} + a_{j2}\alpha_i^{m-2} + \ldots + \alpha_{jm};$$

donc, le déterminant qui figure dans le premier membre de (2) est le produit de R par A. La formule (2) donne alors

$$\mathrm{RA} = \mathrm{A}\,\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots,$$

ou enfin

$$(3)\qquad \psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_m) = \mathrm{R}.$$

La fonction R est donc le premier membre de la résultante des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Il est d'ailleurs facile de reconnaître, dans les polynômes ψ_1, ψ_2, ..., ceux qui servent à Cauchy pour former sa résultante.

C'est, je crois, la première fois que l'identité (3) est démontrée directement. Le théorème de Bézout en découle.

Cette méthode peut être généralisée et étendue à un nombre quelconque d'équations à l'aide de la notion des polynômes réduits et des équivalences algébriques dont j'ai présenté la théorie dans les *Nouvelles Annales* l'année dernière.

Considérons les équations algébriques

$$(1)\qquad \varphi_1 = 0,\qquad \varphi_2 = 0,\qquad \ldots,\qquad \varphi_n = 0,$$

des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soit ψ une fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré μ. Appelons $1 = \omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{p-1}$ les $p = m_1 m_2 \ldots m_n$ arguments réduits, c'est-à-dire les quantités de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots$ qui ne contiennent pas de facteur $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$. Soient $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ les polynômes réduits équivalents à $\omega^0\psi, \omega^1\psi, \ldots, \omega^{p-1}\psi$; enfin désignons en général par $(\mathrm{F})_i$ ce que devient un polynôme F quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les éléments de la $i^{\text{ième}}$ solution des équations (1) que nous supposons distinctes, finies et au nombre de p. Posons

$$\Theta = \begin{vmatrix} (\psi_0)_1 & (\psi_1)_1 & \ldots & (\psi_{p-1})_1 \\ (\psi_0)_2 & (\psi_1)_2 & \ldots & (\psi_{p-1})_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (\psi_0)_p & (\psi_1)_p & \ldots & (\psi_{p-1})_p \end{vmatrix}.$$

Si l'on pose

$$\Omega = \begin{vmatrix} (\omega^0)_1 & (\omega^1)_1 & \ldots & (\omega^{p-1})_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (\omega^0)_p & (\omega^1)_p & \ldots & (\omega^{p-1})_p \end{vmatrix},$$

et si, faisant, en général,

$$\psi_j = a_{j0}\,\omega^0 + a_{j1}\,\omega^1 + \ldots + a_{jp-1}\,\omega^{p-1},$$

on désigne par R le déterminant $\Sigma a_{00}\, a_{11} \ldots a_{p-1\,p-1}$, on observe que l'on a

$$(\psi_j)_i = (\omega^j \psi)_i,$$

on trouvera

$$\Theta = \Omega \mathrm{R}; \tag{2}$$

mais le déterminant Θ peut aussi se mettre sous la forme

$$\Theta = \begin{vmatrix} (\psi)_1 (\omega^0)_1 & (\psi)_1 (\omega^1)_1 \\ (\psi)_2 (\omega^0)_2 & (\psi)_2 (\omega^1)_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

ou

$$\Theta = (\psi)_1 (\psi)_2 \ldots (\psi)_p. \tag{3}$$

De (2) et (3) on conclut

$$R = (\psi)_1 (\psi)_2 \ldots (\psi)_n,$$

et $R = 0$ est la résultante du système

$$\psi = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0$$

L'évaluation du degré de R ne présente d'ailleurs aucune difficulté.