NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BARISIEN

Solution de la question de géométrie analytique donnée au concours d'agrégation des sciences mathématiques (1886)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 372-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__372_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1886);

PAR M. BARISIEN,
Capitaine d'Infanterie.

Étant donnés dans un plan une droite D, *un point* O *sur cette droite et une droite* D', *on demande :*

1° *De former l'équation générale des coniques qui touchent la droite* D *au point* O *et qui ont la droite* D' *pour directrice;*

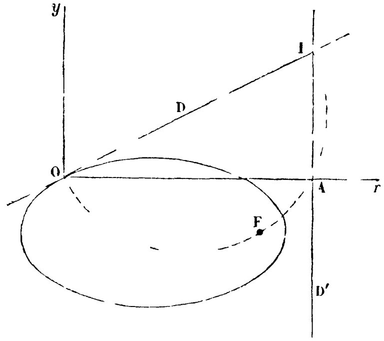
2° *De montrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque* P *du plan. Déterminer la région où doit se trouver le point* P *pour que ces deux courbes* *soient réelles, et, dans ce cas, en reconnaître le genre;*

3° *Les deux coniques du faisceau considéré, qui passent en un point* P, *se coupent en un second point* P′; *calculer les coordonnées du point* P′ *en fonction de celles du point* P; *et, en supposant que le point* P *décrive une ligne* C, *trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point* P′ *décrive la même ligne.*

I.

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au point O (*fig.* 1) et l'axe des x étant la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D′.

Fig. 1.



Appelons a la distance OA du point O à la droite D′: cette quantité a sera toujours positive si l'on a soin de diriger la partie positive de l'axe des x du côté de D′.

Soit aussi m le coefficient angulaire de la droite D, qu'on peut toujours supposer positif en choisissant convenablement le sens positif de l'axe des y.

Les axes de la conique sont dès lors parallèles à Ox et Oy; d'ailleurs la conique est tangente à la droite D au point O; son équation est donc de la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{C} + mx - y = 0,$$

A et C étant des paramètres variables.

Il reste à exprimer que la conique a pour directrice la droite D'. Si α et β sont les coordonnées du foyer F correspondant, l'équation de la conique pourra aussi s'écrire

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \lambda(x-a)^2$$

ou, en développant,

$$(2) \quad x^2(1-\lambda) + y^2 - 2(\alpha - \lambda a)x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - \lambda a^2 = 0;$$

l'identification des équations (1) et (2) donne, entre les cinq paramètres α, β, λ, A et C, les quatre relations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \lambda a^2, \\ \alpha + \beta m &= \lambda a, \\ 2\beta &= C, \\ A\lambda &= A - C. \end{aligned} \right.$$

Les trois dernières donnent α, β et λ en fonction de A et C, et, en portant ces valeurs dans la première, on trouve

$$(4) \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{A} + \frac{A(m^2+1)}{4a(Am+a)}.$$

L'équation générale demandée est donc, en fonction du paramètre variable A,

$$(5) \qquad \frac{1}{A}(x^2+y^2) + \frac{A(m^2+1)y^2}{4a(a+Am)} + mx - y = 0.$$

Remarque. — *Si l'on élimine λ entre les deux premières relations* (3), *on obtient l'équation*

$$(6) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - a\alpha - am\beta = 0,$$

qui montre incidemment que le lieu des foyers des co-

niques de l'énoncé est un cercle passant par les points O, A *et par le point d'intersection* E *des droites* D *et* D'.

II.

Soient X, Y les coordonnées d'un point P du plan. Nous aurons alors, pour déterminer les coniques (5) qui passent par ce point, l'équation

$$\frac{1}{A}(X^2+Y^2)+\frac{A(m^2+1)Y^2}{4a(Am+a)}+mX-Y=0.$$

Cette équation du second degré en A, développée et ordonnée par rapport à A, devient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &A^2[(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)]\\ &\qquad +4aA[m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)]\\ &\qquad\qquad +4a^2(X^2+Y^2)=0. \end{aligned}\right.$$

Si A' et A'' sont les deux racines, on les portera dans (5), et l'on aura ainsi les équations des deux coniques passant par le point P.

Pour que les deux valeurs de A soient réelles, il faut avoir

$$\begin{aligned} &[m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)]^2\\ &\quad -(X^2+Y^2)[(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)]\geqq 0, \end{aligned}$$

inégalité qui se réduit à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(Y-mX)[(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)\\ &\qquad\qquad +a^2(mX-Y)]\leqq 0. \end{aligned}\right.$$

Le facteur placé dans la première parenthèse représente la droite D; quant à la seconde parenthèse, il est facile de voir qu'elle représente une strophoïde oblique ayant le point A pour point double et la droite

$$mX+Y-2am=0$$

pour asymptote; elle passe en outre par le point O où elle touche la droite D et rencontre son asymptote à l'intersection des droites D et D′.

Il est à remarquer que la droite D et la strophoïde forment l'enveloppe de toutes les coniques (5).

La région du plan, positive par rapport à la strophoïde, négative par rapport à la droite D, ou inversement, négative par rapport à la strophoïde et positive par rapport à la droite D, sera telle que les coordonnées des points de cette région vérifient l'inégalité (8). Donc, quand le point P sera dans ces régions, les deux coniques passant par ce point seront toujours réelles ([1]). Dans les autres parties du plan, les coniques seront imaginaires.

Il reste à voir ce qui arrive lorsque le point P sera, soit sur la droite D, soit sur la strophoïde. Les deux valeurs de A seront alors confondues en une seule

$$A = -\frac{2a(X^2+Y^2)}{m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)}.$$

La conique répondant à cette valeur sera une conique double.

1° Si le point P est sur la droite D, on a

$$Y = mX,$$

et A devient

$$A = -\frac{2a}{m}.$$

En portant cette valeur dans (5), on trouve que la conique double passant par P se compose des deux droites

$$(y - mx)(y + mx - 2am = 0.$$

La première de ces droites est la droite D elle-même. Quant à la seconde, elle ne passe évidemment par le

---

([1]) Les régions où doit se trouver le point P pour donner des coniques réelles sont marquées sur les figures par des hachures.

point P que lorsque celui-ci est à l'intersection de D et D'.

2° Si le point P est sur la strophoïde, on a

$$(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)+a^2(mX-Y)=0,$$

et A devient

$$A=\frac{2a^2}{mX+Y-3am}.$$

Nous verrons tout à l'heure le moyen de distinguer la nature de la conique double passant par un point de la strophoïde.

Étudions la nature des coniques passant par un point quelconque P. Le déterminant Δ de ces coniques est

$$\Delta=-\frac{1}{AC}=-\frac{[(Am+2a)^2+A^2]}{4aA^2(Am+a)};$$

donc, puisque a est positif, la conique est une ellipse ou une hyperbole, suivant que l'on a

$$Am+a>0 \qquad \text{ou} \qquad Am+a<0.$$

Si A' et A'' sont les deux racines de l'équation (7), nous avons

$$(9) \qquad A'A''=\frac{4a^2(X^2+Y^2)}{(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)}.$$

$$(10) \qquad A'+A''=-\frac{4a[m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)]}{(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)}.$$

Le dénominateur commun de $A'A''$ et $(A'+A'')$ représente une parabole tangente à la droite D en O, ayant son axe parallèle à l'axe des x et qu'il est facile de construire.

Le numérateur de $(A'+A'')$ représente un cercle tangent également à la droite D au point O et de rayon $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{2m}$.

La nature de chacune des coniques répondant à A' et A″ est indiquée par le signe des quantités

$$A'm + a, \quad A''m + a.$$

Remarquons que le produit de ces deux quantités est

$$\begin{aligned}(A'm + a)(A''m + a) &= A'A''m^2 + am(A' + A'') + a^2 \\ &= A'A''\left(m^2 + am\,\frac{A' + A''}{A'A''} + \frac{a^2}{A'A''}\right).\end{aligned}$$

En vertu des relations (9) et (10), ce produit se réduit à

$$\frac{(m^2+1)Y^2}{4(X^2+Y^2)}\,A'A'',$$

ce qui indique que son signe est le même que celui de A′A″.

Si donc A′ et A″ sont de même signe, les deux coniques sont du même genre; si, au contraire, A′ et A″ sont de signes différents, les deux coniques sont de genres différents.

1° Examinons d'abord le cas où A′ et A″ sont de même signe. Il en résulte l'inégalité

$$(m^2+1)Y^2 + 4am(mX - Y) > 0,$$

qui exprime que le point P se trouve dans la région positive de la parabole. A′ et A″, étant de même signe, peuvent être, ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs.

Si A′ et A″ sont tous deux positifs, on a en même temps

$$A'm + a > 0, \qquad A''m + a > 0.$$

Les coniques correspondantes sont, par suite, deux ellipses, et alors, à cause du signe de (A′ + A″), on a l'inégalité

$$m(X^2 + Y^2) + a(mX - Y) < 0,$$

Dans ce cas, le point P est à la fois dans la région positive de la parabole et dans la région négative du cercle.

Si A' et A'' sont tous deux négatifs, et si en même temps

$$A'm + a < 0, \qquad A''m + a < 0,$$

les coniques correspondantes sont deux hyperboles et l'on a

$$m(X^2 + Y^2) + a(mX - Y) > 0.$$

Le point P se trouve alors à la fois dans les régions positives de la parabole et du cercle.

Mais il peut aussi arriver que, outre les inégalités

$$A' < 0, \qquad A'' < 0,$$

on ait encore

$$A'm + a > 0, \qquad A''m + a > 0.$$

Les coniques sont alors deux ellipses. En divisant ces deux inégalités respectivement par les quantités négatives A' et A'' et ajoutant membre à membre, il vient

$$a\left(\frac{A' + A''}{AA''}\right) + 2m < 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations (9) et (10),

$$m(X^2 + Y^2) - a(mX - Y) < 0.$$

Le premier membre de cette inégalité représente un cercle symétrique par rapport au point O du cercle déjà considéré. Si donc le point P est à l'intérieur du cercle, ce qui arrive pour la boucle de la strophoïde, les deux coniques sont des ellipses.

2° Soit maintenant le cas où A' et A'' sont de signes contraires. Alors

$$(m^2 + 1)Y^2 + 4am(mX - Y) < 0,$$

ce qui indique que le point P est dans la région négative de la parabole.

Les deux coniques sont dans ce cas, l'une une ellipse, l'autre une hyperbole.

Revenons au cas où le point P est sur la strophoïde : nous avons vu qu'alors la valeur double de A était

$$A = \frac{2a^2}{mX + Y - 3am},$$

d'où

$$Am + a = \frac{a(mX + Y - am)}{mX + Y - 3am}.$$

Si donc on trace les deux droites parallèles

$$mX + Y - 3am = 0,$$
$$mX + Y - \quad am = 0,$$

on voit que, si le point P est sur la portion de strophoïde située entre ces deux droites, $(Am + a)$ est négatif; la conique double est alors une hyperbole. Sur le reste de la strophoïde, la conique double est une ellipse.

Si le point P est à l'intersection de la strophoïde et de la droite

$$mX + Y - 3am = 0,$$

la conique est une parabole double.

Si le point P est à l'intersection de la strophoïde et de la droite

$$mX + Y - 3am = 0,$$

c'est-à-dire au point double, on a

$$Am + a = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{a}{m}.$$

L'équation (5) de la conique devient dans ce cas

$$y^2 = 0,$$

de sorte qu'au point double les deux coniques sont représentées par la droite quadruple axe des x.

Il est du reste facile de voir que, lorsque le point P sera sur l'axe des x, l'une des coniques sera la droite double axe des x.

Voyons ce qui se passe lorsque le point P est sur la parabole. Alors

$$(m^2+1)Y^2+4am(mX-Y)=0;$$

il en résulte

$$A'=0, \qquad A''=-\frac{a(X^2+Y^2)}{m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)},$$

c'est-à-dire que la conique A' est la parabole elle-même. Quant à la conique A'', on a

$$A''m+a=-\frac{a}{4m}\,\frac{(m^2+1)Y^2}{m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)}.$$

Donc, pour la portion de parabole située à l'extérieur du cercle, la conique A'' est une hyperbole; pour la portion de parabole située à l'intérieur du cercle, cette conique est une ellipse.

La discussion que nous venons de présenter est tout à fait générale; elle ne préjuge rien sur les situations respectives de la strophoïde, du cercle et de la parabole.

Pour voir comment sont situées ces courbes, cherchons d'abord les points d'intersection de la droite

$$mX+Y-3am=0,$$

avec la strophoïde

$$(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)+a^2(mX-Y)=0.$$

Cette dernière équation devient, en tenant compte de la première

$$m(X^2+Y^2)+a(mX-Y)=0.$$

Par suite, l'équation homogène du second degré représentant les droites joignant les points d'intersection à l'origine est

$$3m^2(X^2+Y^2)+m^2X^2-Y^2=0,$$

d'où

$$(11) \qquad Y=\pm\frac{2m}{\sqrt{1-3m^2}}X.$$

Les deux points d'intersection sont donc chacun sur une des deux droites (11) passant par l'origine et également inclinées sur les axes.

Voyons comment se coupent la strophoïde et le cercle. Leurs équations sont

$$\begin{aligned}(X^2+Y^2)(mX+Y-2am)&=a^2(Y-mX)\\ m(X^2+Y^2)&=a\,(Y-mX).\end{aligned}$$

En les divisant membre à membre, on trouve

$$mX+Y=3am,$$

ce qui indique que le cercle et la strophoïde se coupent sur cette droite.

D'autre part, les équations du cercle et de la parabole étant

$$\begin{aligned}m(X^2+Y^2)&=a(Y-mX),\\ (m^2+1)Y^2&=4am(Y-mX),\end{aligned}$$

on a, en multipliant en croix,

$$4m^2(X^2+Y^2)=(m^2+1)Y^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (11).

On trouve aussi facilement que la strophoïde et la parabole se coupent sur la droite

$$mX+Y=3am.$$

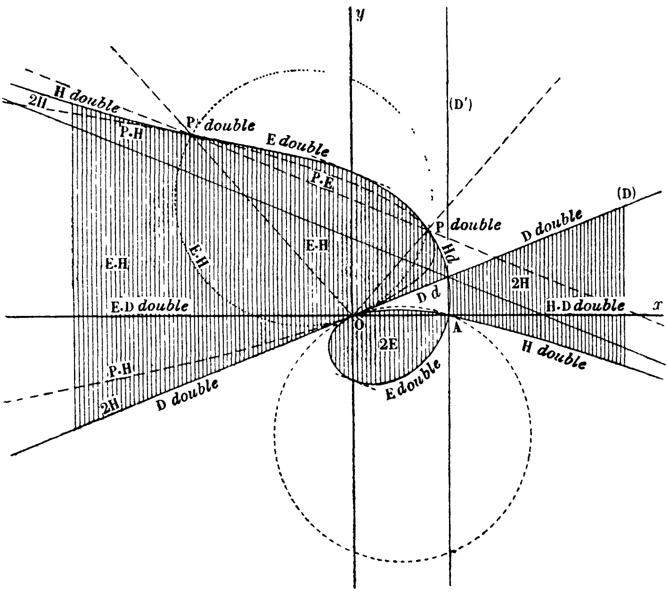
Il faut donc conclure de là cette propriété remarquable, que *la strophoïde, la parabole et le cercle ont pour corde commune cette dernière droite.*

Il est facile de voir, de plus, qu'en leurs points d'intersection la parabole et la strophoïde sont tangentes.

L'équation (11) montre que :

Si $m < \frac{1}{\sqrt{3}}$, ces courbes se coupent en des points réels (*fig.* 2);

Fig. 2.



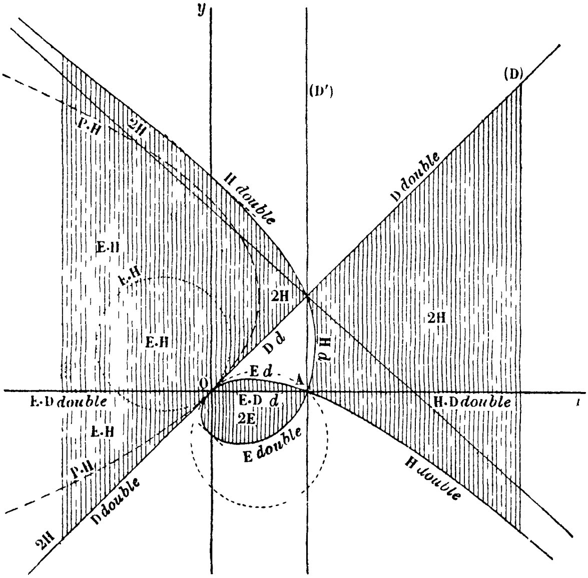
Si $m > \frac{1}{\sqrt{3}}$, elles ne se rencontrent qu'en des points imaginaires (*fig.* 3);

Si $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ces courbes sont tangentes (*fig.* 4).

Nous indiquons sur trois figures différentes ce que deviennent les régions réelles et imaginaires et la nature des coniques dans ces trois cas.

Pour construire facilement chacune des courbes, strophoïde, parabole et cercle, cherchons les ordonnées de ces courbes aux points où elles rencontrent l'axe des y.

Fig. 3.



L'ordonnée positive de la strophoïde est

$$Y_s = a\sqrt{1+m^2} + am.$$

Pour la parabole, on a

$$Y_p = \frac{4am}{m^2+1};$$

enfin, pour le cercle,

$$Y_c = \frac{a}{m}.$$

Il est facile de voir que, quel que soit m, on a toujours

$$Y_s > Y_p.$$

tandis que l'on a

$$Y_p > Y_c \quad \text{si} \quad m > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

et

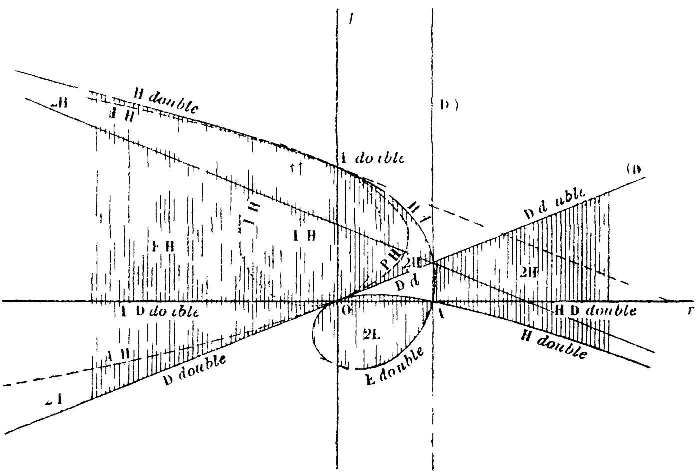
$$Y_p < Y_c \quad \text{si} \quad m < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a

$$Y_s = Y_p = Y_e$$

Les trois courbes sont alors tangentes au point $[X = 0, Y = a\sqrt{3}]$.

Fig. 4



Rappelons ici le tracé géométrique de la strophoïde. On mènera par le point O une droite rencontrant en I la droite

$$mX + Y = am,$$

on prendra sur OI et de part et d'autre de I

$$IM = IM' = IA.$$

Les points M et M' appartiendront à la strophoïde

Il faut aussi remarquer qu'aux deux points où la strophoïde coupe l'axe des y, la tangente est parallèle à l'asymptote.

III.

Nous avons vu que les valeurs A' et A'' répondant aux deux coniques passant par le point P de coordonnées X et Y sont fournies par l'équation (7).

Les équations de ces deux coniques sont

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{A'} + \dfrac{y^2}{C'} - mx - y = 0, \\ \dfrac{x^2}{A''} + \dfrac{y^2}{C''} - mx - y = 0 \end{array}\right.$$

Comme ces deux coniques sont tangentes à la droite D en O, elles n'ont que deux autres points d'intersection, le point P(X, Y) et le point P' dont nous désignerons les coordonnées par X_1 et Y_1.

En retranchant l'une de l'autre les équations (12), on obtient

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\dfrac{1}{A''} - \dfrac{1}{A'}}{\dfrac{1}{C'} - \dfrac{1}{C''}}},$$

ce qui indique que les droites OP et OP' sont également inclinées sur les axes. Or, d'après la relation (4), on a

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{A'} - \frac{A'(m^2+1)}{4a(A'm+a)},$$

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{A''} - \frac{A''(m^2-1)}{4a(A''m-a)}.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{C'} - \frac{1}{C''} = \left(\frac{1}{A'} - \frac{1}{A''}\right)\left[\frac{4(A'm-a)(A''m+a)-(m^2-1)A'A''}{4(A'm+a)(A''m+a)}\right].$$

Mais nous avons déjà vu que

$$(A'm-a)(A''m-a) = \frac{(m^2+1)Y^2}{4(X^2-Y^2)}A'A'',$$

donc

$$\frac{1}{C'} - \frac{1}{C''} = \left(\frac{1}{A''} - \frac{1}{A'}\right)\frac{X^2}{Y^2};$$

et, en effet, les droites OP et OP′ ont bien pour équations

$$y = \pm \frac{Y}{X} x.$$

Celle de OP étant

$$y = \frac{Y}{X} x,$$

on a, pour celle de OP′,

$$y = -\frac{Y}{X} x.$$

Cherchons l'abscisse du point P′ d'intersection de cette droite avec la première des coniques (12), par exemple, il viendra

$$x = -\frac{Xm(X+Y)}{\frac{X^2}{A'} + \frac{Y^2}{C'}},$$

mais

$$\frac{X^2}{A'} + \frac{Y^2}{C'} = Y - mX.$$

Donc l'abscisse x, qui est justement X_1, est, en fonction de X et Y,

$$(13) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{X(mX+Y)}{mX-Y}, \\ Y_1 = -\dfrac{Y(mX+Y)}{mX-Y}. \end{cases}$$

On en déduit les deux relations

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{Y_1^2}{X_1^2} = \dfrac{Y^2}{X^2}, \\ mX_1 + Y_1 = mX + Y. \end{cases}$$

Par suite, si l'on considère l'équation des courbes de la forme

$$F\left[\frac{Y^2}{X^2}, (mX+Y), k\right] = 0,$$

k étant une constante, ces courbes seront à la fois le lieu des points P et P'.

Il est à remarquer que les valeurs de $X_1 Y_1$ sont indépendantes de a.

On peut observer aussi que l'équation de la droite PP' est

$$y + mx = Y + mX,$$

ce qui indique que la droite PP' est parallèle à l'asymptote de la strophoïde.

Remarque. — Considérons le cas où $m = 0$. L'équation (7) devient alors

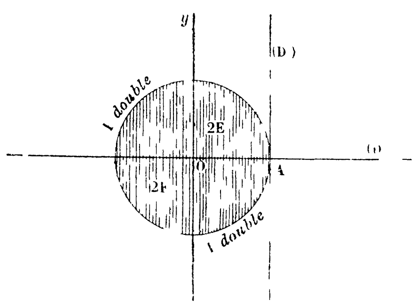
$$A^2Y^2 - 4a^2YA + 4a^2(X^2 + Y^2) = 0$$

Dans ce cas, l'axe des x représente à la fois le cercle et la parabole. La condition (8) devient

$$Y^2(X^2 + Y^2 - a^2) \leq 0,$$

de sorte qu'il faut que le point P soit à l'intérieur du cercle de rayon OA (*fig.* 5) pour que les deux co-

Fig. 5



niques passant par ce point soient réelles. Ce seront toujours deux ellipses, car avec $m = 0$ on a $Am + a = a$, quantité toujours positive.

IV.

Dans le cas particulier de $m = \infty$, les formules générales sont en défaut. Il faut alors traiter directement la question.

L'équation générale des coniques tangentes à l'origine à l'axe des y est

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{C} + x = 0.$$

Le foyer est sur l'axe des x à une distance α de l'origine, de sorte que l'équation de ces coniques peut aussi s'écrire

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \lambda(x - a)^2;$$

identifiant ces deux équations, nous avons les relations

$$A(1 - \lambda) = C = 2(\lambda a - \alpha),$$
$$\alpha^2 = \lambda a^2.$$

En éliminant α et λ entre trois équations, on trouve sans difficulté

$$C = \frac{4aA(A + a)}{(A + 2a)^2}.$$

L'équation générale des coniques est donc

$$\frac{x^2}{A} + \frac{(A + 2a)^2}{4aA(A + a)} y^2 + x = 0.$$

Les deux coniques passant par un point $P(X, Y)$ sont donc déterminées par l'équation en A

$$A^2(Y^2 + 4aX) + 4Aa(X^2 + Y^2 + aX) + 4a^2(X^2 + Y^2) = 0,$$

d'où

$$A' + A'' = -\frac{4a(X^2 + Y^2 + aX)}{Y^2 + 4aX}, \qquad A'A'' = \frac{4a^2(X^2 + Y^2)}{Y^2 + 4aX}.$$

Les déterminants Δ' et Δ'' des coniques répondant à

A' et A'' sont donc

$$\Delta' = -\frac{1}{\Lambda' C'} = -\frac{(A'+2a)^2}{4a\Lambda'^2(A'+a)},$$

$$\Delta'' = -\frac{1}{\Lambda' C'} = -\frac{(\Lambda''-2a)^2}{4a\Lambda''^2(\Lambda''+a)},$$

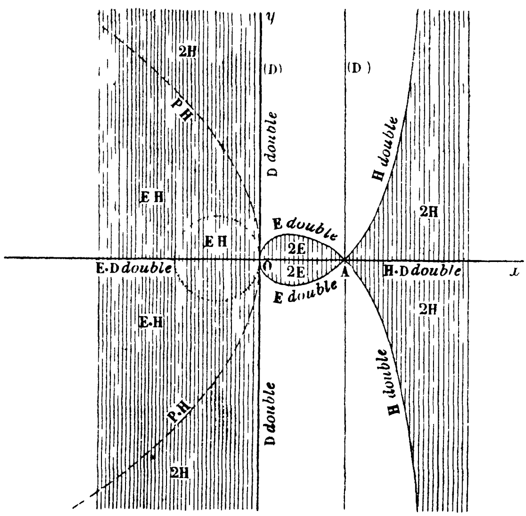
par suite

$$\Delta'\Delta'' = \frac{(\Lambda'-2a)^2(A''+2a)^2}{16a^2\Lambda'^2\Lambda''^2(A'+a)(\Lambda''+a)}$$

et

$$(\Lambda'-a)(A'+a) = A'A''\left(1-a\frac{A'+\Lambda'}{\Lambda'\Lambda''}+\frac{a^2}{\Lambda'\Lambda''}\right)$$
$$= \frac{4(\Lambda^2+\Lambda^2)}{A'A''\Lambda^2}.$$

Fig. 6



Donc, le signe de $\Delta'\Delta''$ est le même que celui de $A'A''$, comme dans le cas général.

La condition de réalité des racines de A est

$$\Lambda[(\Lambda-2a)(\Lambda^2-\Lambda^2)-a^2\Lambda]>0$$

La strophoïde est ici une strophoïde droite (*fig.* 6).

La discussion se fait absolument comme dans le cas général.

MM. Chambon et Abelin ont aussi envoyé des solutions de cette question.