NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DROUET

Sur les foyers des sections planes d'une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 321-325
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__321_1>

SUR LES FOYERS DES SECTIONS PLANES D'UNE QUADRIQUE [1];

PAR M. DROUET,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Janson.

1. M. Salmon, dans son *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* (traduction Chemin, p. 295), parvient, par une méthode fort savante, à une règle simple pour former l'équation tangentielle des foyers d'une section plane d'un ellipsoïde; nous nous proposons ici de déduire cette règle d'une propriété élémentaire des foyers d'une conique.

Nous supposerons l'ellipsoïde rapporté à ses axes de symétrie, et le plan de la section passant par le centre.

Soit

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - h^2 = 0$$

l'équation tangentielle de l'ellipsoïde, et soient

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad 0$$

les coordonnées du plan sécant.

---

[1] Voir 2e série; t. III, p. 481.

On obtient une première forme de l'équation tangentielle de la section en écrivant que le produit des distances des deux foyers à une tangente est égal au carré de l'un des demi-axes. Si l'on considère un plan P (u, v, w, h) passant par une tangente, la distance du foyer à cette tangente peut s'obtenir en multipliant la distance du même foyer au plan P par $\sin\theta$, θ étant l'angle du plan P et du plan sécant. On trouve ainsi, en désignant par x_1, y_1, z_1 et $-x_1, -y_1, -z_1$, les coordonnées des foyers et par S le carré du demi-axe correspondant, l'équation

$$\frac{-(ux_1+vy_1+wz_1)^2+h^2}{u^2+v^2+w^2} = S\left[1-\frac{(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(u^2+v^2+w^2)}\right]$$

ou encore

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}(ux_1+vy_1+wz_1)^2-h^2\\ \qquad +S\left[u^2+v^2+w^2-\dfrac{(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right]=0.\end{array}\right.$$

Pour obtenir une seconde forme de l'équation tangentielle de la section, nous écrirons que les deux plans tangents menés à l'ellipsoïde par une droite tangente à la section sont confondus. En considérant cette droite comme l'intersection du plan sécant $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ et du plan (u, v, w, h), nous trouvons la condition

$$(2)\quad a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-h^2-\frac{(a^2\alpha u+b^2\beta v+c^2\gamma w)^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}=0.$$

Cela posé, si nous écrivons que les équations (1) et (2) représentent une même conique, nous sommes conduits à l'identité

$$(3)\qquad f-S\varphi=P^2-h^2,$$

où P^2-h^2 est le premier membre de l'équation tangentielle des foyers, c'est-à-dire l'équation cherchée; d'ailleurs f est le premier membre de l'équation (2) de la section, et φ désigne l'expression

$$(4) \qquad \frac{(u^2+v^2+w^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha u+\beta v+\gamma w)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2};$$

enfin S représente le carré d'un des demi-axes, et par suite est, comme on le sait, une racine de l'équation

$$(5) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{a^2-S}+\frac{b^2\beta^2}{b^2-S}+\frac{c^2\gamma^2}{c^2-S}=0;$$

on retrouverait cette équation en écrivant que le discriminant de $f - S\varphi$ est nul.

On voit donc que, *pour obtenir les foyers d'une section plane d'un ellipsoïde, il suffit de considérer les coniques évanouissantes du faisceau tangentiel*

$$f - S\varphi = 0,$$

$f = 0$ étant l'équation de la section, et $\varphi = 0$ l'équation des points où la conique $u^2+v^2+w^2=0$ est rencontrée par le plan sécant. C'est la règle donnée par M. Salmon.

2. On serait encore conduit à l'identité (3) si l'on cherchait à déterminer les foyers en les considérant comme formant la trace d'une focale de la section sur le plan de cette section (Pruvost, *Leçons de Géométrie analytique,* t. II, p. 416).

Pour le vérifier, posons

$$\psi(u, v, w, h) = f - S(u^2+v^2+w^2),$$

S désignant une racine de l'équation (5).

ψ est le premier membre de l'équation d'une focale et les points où cette focale est rencontrée par le plan

$(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ ont pour équation tangentielle

$$4\psi(u, v, w, h)\,\psi(\alpha, \beta, \gamma, 0) - (u\psi'_\alpha + v\psi'_\beta + w\psi'_\gamma)^2 = 0$$

mais, comme

$$f(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma, 0) = - S(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

le premier membre de l'équation précédente, divisé par un facteur numérique, peut s'écrire

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - h^2 - \frac{(a^2\alpha u + b^2\beta v + c^2\gamma w)^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}$$
$$- S\left[u^2 + v^2 + w^2 - \frac{(\alpha u + \beta v + \gamma w)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right],$$

et l'on reconnait le premier membre de l'identité (3).

3. On peut aisément trouver les équations qui déterminent les coordonnées cartésiennes d'un foyer d'une section plane d'un ellipsoïde, en s'aidant de la remarque géométrique suivante :

Si l'on considere un cône passant par l'intersection de deux surfaces du second ordre, un plan tangent à ce cône coupe les deux surfaces suivant deux coniques bitangentes.

D'après cela, si l'ellipsoïde et le plan sécant sont donnés par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$(\mathrm{P}) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

et si x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées d'un point du plan P, pour écrire que ce point est foyer de la section, il suffit d'exprimer que l'équation

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} S\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right) \\ \qquad [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2] = 0 \end{cases}$$

représente un cône tangent au plan (P).

Si l'on exprime successivement les conditions qui doivent être remplies :

1° Pour que l'équation (Γ) représente un cône ;

2° Pour que le cône (Γ) ait son centre sur le plan (P) ;

3° Pour que le cône parallèle à Γ ayant pour sommet l'origine admette comme plan tangent un plan parallèle à (P) ;

4° Pour que le point (x_1, y_1, z_1) soit dans le plan P ;
on trouve les équations cherchées

$$\frac{x_1^2}{a^2 - S} - \frac{y_1^2}{b^2 - S} + \frac{z_1^2}{c^2 - S} - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2 - S} - \frac{\beta y_1}{b^2 - S} + \frac{\gamma z_1}{c^2 - S} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{a^2 \alpha^2}{a^2 - S} + \frac{b^2 \beta^2}{b^2 - S} + \frac{\gamma^2 z^2}{c^2 - S} = 0, \tag{3}$$

$$\alpha x_1 - \beta y_1 + \gamma z_1 + \delta = 0. \tag{4}$$