H. LAURENT

Remarques sur les conditions d'intégrabilité

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 305-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__305_0>

REMARQUES SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ

[SUITE ET FIN (1)];

PAR M. H. LAURENT.

Jacobi a démontré que, si l'on avait n équations

$$(1) \qquad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_n = a_n,$$

entre les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$, dans lesquelles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des constantes arbitraires, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte était donnée par les formules identiques

$$\begin{array}{cccc}
(f_1, f_2) = 0, & (f_1, f_3) = 0, & \ldots, & (f_1, f_n) = 0, \\
 & (f_2, f_3) = 0, & \ldots, & (f_2, f_n) = 0, \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
 & & & (f_{n-1}, f_n) = 0.
\end{array}$$

Mais nous allons voir qu'il suffit que les formules écrites sur la première ligne soient satisfaites identiquement, que celles qui sont écrites sur la seconde le soient pour $x_1 = x_1^0$, que celles qui sont écrites sur la troisième le soient pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, etc. Le symbole (f_i, f_j) est d'ailleurs défini par la formule

$$(f_i, f_j) = \sum \frac{\partial(f_i, f_j)}{\partial(x_\mu, p_\mu)}.$$

Nous allons généraliser un peu ce théorème de Ja-

(1) Voir même Tome, p. 274.

cobi, ce qui nous servira un peu plus loin, et nous supposerons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ contiennent, outre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, une fonction u dont les dérivées relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_n$; ainsi il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n \tag{2}$$

soit complètement intégrable, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant les solutions des équations (1).

Les conditions d'intégrabilité complète de l'équation (2) sont données par la formule

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_j}{\partial u} p_j = \frac{\partial p_j}{\partial x_i} + \frac{\partial p_j}{\partial u} p_i,$$

dans laquelle on doit supposer i et j égaux à 1, 2, 3, ..., n. Cette équation d'ailleurs peut s'écrire sous la forme plus simple

$$\frac{dp_i}{dx_j} = \frac{dp_j}{dx_i}, \tag{3}$$

le d étant employé pour désigner les dérivées totales prises en faisant varier u et en lui assignant pour dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On a, en adoptant cette notation,

$$\frac{df_i}{dx_\mu} + \frac{\partial f_i}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_\mu} + \frac{\partial f_i}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dx_\mu} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_\mu} = 0,$$

$$\frac{df_j}{dx_\mu} + \frac{\partial f_j}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dx_\mu} + \frac{\partial f_j}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dx_\mu} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dx_\mu} = 0;$$

on conclut de là, en ajoutant ces deux équations après avoir multiplié la première par $\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu}$ et la seconde par $-\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}$, puis en ajoutant les résultats obtenus et faisant

$\mu = 1, 2, \ldots, n,$

$$(4) \qquad \sum\left(\frac{df_i}{dx_\mu}\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu} - \frac{df_j}{dx_\mu}\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}\right) = 0,$$

en tenant compte de la relation (3). Il n'y a presque rien à changer, comme l'on voit, à la démonstration que Jacobi a donnée de ses formules, et l'on démontre que les formules (4), nécessaires, sont suffisantes, par le procédé de Jacobi.

Nous admettrons donc que ces équations sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation (2) soit complètement intégrable; nous poserons

$$\begin{aligned}&\sum\left(\frac{df_i}{dx_\mu}\frac{\partial f_j}{\partial p_\mu} - \frac{df_j}{dx_\mu}\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}\right)\\ &\quad = \sum\left(\frac{df_i}{dx_\mu}\frac{df_j}{dp_\mu} - \frac{df_j}{dx_\mu}\frac{df_i}{dp_\mu}\right) = \{f_i, f_j\} = f_{ij}.\end{aligned}$$

Il est facile de se convaincre alors que l'on a identiquement

$$(5) \qquad \{f_i, f_{jk}\} + \{f_j, f_{ki}\} + \{f_k, f_{ij}\} = 0:$$

c'est le théorème de Donkin généralisé. Cette équation (5) met en évidence ce fait important : si f_{ki} et f_{ij} sont nuls, on a

$$\{f_i, f_{jk}\} = 0;$$

f_{jk} est donc une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\sum\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} + p_\mu\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)\frac{\partial V}{\partial p_\mu} - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\mu} + p_\mu\frac{\partial V}{\partial u}\right)\frac{\partial f_i}{\partial p_\mu}\right] = 0.$$

Or cette équation est linéaire et homogène; si l'on assujettit une de ses intégrales à s'annuler pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient $x_2, x_3, \ldots, x_n$, cette intégrale sera identiquement nulle; il résulte de là que, si

$$\{f_1, f_2\}, \quad \{f_1, f_3\}, \quad \ldots, \quad \{f_1, f_n\}$$

sont identiquement nuls et si, i et j étant différents de 1, on a

$$\left\{ f_i, f_j \right\} = 0 \tag{6}$$

pour $x_1 = x_1^0$, quels que soient $x_2, x_3, \ldots, x_n$, les formules (6) seront identiques, et l'équation (2) sera complètement intégrable; on voit donc que les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité complète de l'équation (2) sont que

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ f_1, f_2 \right\} = 0, \quad \left\{ f_1, f_3 \right\} = 0, \quad \ldots, \quad \left\{ f_1, f_n \right\} = 0, \\ \text{quels que soient } x_1, x_2, \ldots, x_n; \\ \qquad \left\{ f_2, f_3 \right\} = 0, \quad \ldots, \quad \left\{ f_2, f_n \right\} = 0, \\ \text{pour } x_1 = x_1^0 \text{ quels que soient } x_2, \ldots, x_n; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \qquad \left\{ f_{n-1}, f_n \right\} = 0, \\ \text{pour } x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = {}^0_{n-1} \text{ quel que soit } x_n. \end{array} \right.$$

On peut aussi dire que la condition nécessaire et suffisante pour que (2) soit complètement intégrable est que

$$\left\{ f_1, f_2 \right\} = 0, \quad \left\{ f_1, f_3 \right\} = 0. \quad . ., \quad \left\{ f_1, f_n \right\} = 0,$$

identiquement, et que, en faisant $x_1 = x_1^0$,

$$du = p_2\, dx_2 + p_3\, dx_3 + . \; . + p_n\, dx_n$$

soit complètement intégrable.

Comme l'on voit, les conditions d'intégrabilité peuvent se présenter sous une forme un peu plus simple qu'on ne le fait ordinairement; je vais montrer maintenant l'utilité des nouvelles conditions. Je suppose que l'on veuille intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f_1 = a_1;$$

on pourra, comme le fait Jacobi, chercher des fonctions

$f_2, f_3, \ldots, f_n$ satisfaisant aux conditions trouvées tout à l'heure; les équations

$$(7) \qquad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \ldots, \quad f_n = a_n$$

feront alors connaître des valeurs $p_1, p_2, \ldots$, qui, portées dans (2),

$$du = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

rendront cette équation complètement intégrable, et par suite feront connaître u.

Occupons-nous d'abord des équations écrites sur la première ligne du tableau (6), $f_2, f_3, \ldots, f_{n-1}$ seront des intégrales distinctes de l'équation

$$(f_1, V) = 0$$

ou

$$\sum \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \frac{\partial V}{\partial p_\mu} - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\mu} + p_\mu \frac{\partial V}{\partial u} \right) \frac{\partial f_1}{\partial p_\mu} \right] = 0,$$

ou encore des équations différentielles ordinaires

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dp_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial u}} = \frac{dp_2}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial u}} = \ldots \\ & \qquad = -\frac{dx_1}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial p_1}\right)} = -\frac{dx_2}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial p_2}\right)} = \ldots \\ & \qquad = -\frac{du}{p_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1} + p_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial p_2} + \ldots + p_n \dfrac{\partial f_1}{\partial p_n}}. \end{aligned} \right.$$

Je suppose ces équations intégrées, on tirera les p des intégrales pour les porter dans

$$(9) \qquad du = \Sigma\, p\,dx,$$

équation qui intégrée donnera u. Toute la difficulté consiste à choisir convenablement, parmi les $2n$ intégrales des formules (8), celles qui fourniront les p. Or remarquons que des équations (8) on tire

$$df_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad du = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n;$$

donc l'équation proposée $f_1 = a_1$ est une intégrale de (8) et l'équation (9) est implicitement contenue dans (8), circonstances qui facilitent un peu l'intégration des équations (8). Supposons ces équations intégrées de telle sorte que pour $x_1 = x_1^0$ on ait $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $p_1 = p_1^0$, $p_2 = p_2^0$, $\ldots$, $u = u^0$; toutes ces constantes sont arbitraires, une seule exceptée, en ce sens qu'elles dépendent de a_1 : nous supposerons que cette constante soit p_1^0.

Appelons (E) le système des intégrales de (8) ainsi déterminé; posons

$$(10) \qquad \begin{cases} u^0 = \varpi(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0), \\ p_2^0 = \dfrac{\partial\varpi}{\partial x_2^0}, \qquad p_3^0 = \dfrac{\partial\varpi}{\partial x_3^0}, \qquad \ldots. \end{cases}$$

Éliminons alors entre les équations (10) et (E) les p^0 et les x^0; nous aurons des équations d'où l'on pourra tirer les p et u en fonction des x; ces valeurs satisferont aux équations de la première ligne du tableau (6) et à l'équation (9); de plus, en vertu d'un théorème connu de Cauchy sur les intégrales des équations différentielles, u se réduira à $\varpi(x_2, \ldots, x_n)$ pour $x_1 = x_1^0$ et $p_1, p_2, \ldots$ aux dérivées de la fonction ϖ : toutes les conditions d'intégrabilité sont ainsi satisfaites d'elles-mêmes. On retrouve ainsi la méthode donnée par Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Maintenant montrons comment notre principe permet de simplifier encore la méthode de Jacobi : bornons-nous au cas où la fonction f_1 ne contient pas u. Alors il faut intégrer le système

$$
\begin{array}{lllll}
(1) & (f_1, f_2) = 0, & (f_1, f_3) = 0, & \ldots, & (f_1, f_n) = 0, \\
(2) & & (f_2, f_3) = 0, & \ldots, & (f_2, f_n) = 0, \\
\ldots & & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
(n-1) & & & & (f_{n-1}, f_n) = 0.
\end{array}
$$

Pour y parvenir, on cherche une intégrale de l'équation $(f_1, V) = 0$; soit f_2 une intégrale de cette équation : on cherche ensuite une intégrale des équations simultanées

$$(f_1, V) = 0, \qquad (f_2, V)_0 = 0,$$

l'indice o indiquant que l'on doit faire $x_1 = x_1^0$. Soit f_3 cette intégrale, elle existe puisque $(f_1, f_2) = 0$; on a donc une fonction V satisfaisant à $(f_1, V) = 0$ et à $(f_2, V) = 0$, et par suite à $(f_2, V)_0 = 0$; on cherche ensuite une intégrale commune à

$$(f_1, V) = 0, \qquad (f_2, V)_0 = 0, \qquad (f_3, V)_{00} = 0,$$

et ainsi de suite.

Bien entendu, pour que l'on puisse appliquer cette méthode, il faut que (f_2, V) ne contienne pas $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ dont le coefficient est $\frac{\partial f_2}{\partial p_1}$, et qui sera nul si l'on a eu soin d'éliminer p_1 de f_2 au moyen de $f_1 = a_1$; de même (f_3, V) ne devra pas contenir $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial V}{\partial x_2}$, etc.