

H. LAURENT

**Remarques sur les conditions d'intégrabilité**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 6  
(1887), p. 274-279

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1887\\_3\\_6\\_\\_274\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__274_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**REMARQUES SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ;**

PAR M. H. LAURENT.

---

Dans les Traités classiques, on dit généralement que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expres-



Pour que ces équations soient *complètement intégrables*, c'est-à-dire pour qu'elles définissent  $m$  fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_m$  de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  renfermant  $m$  constantes arbitraires, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dX_{ki}}{dx_j} = \frac{dX_{kj}}{dx_i},$$

le  $d$  indiquant une dérivée totale, et par conséquent

$$\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx_j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx_j} + \dots = \frac{\partial X_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{kj}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx_i} + \dots$$

ou bien

$$(2) \quad \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_1} X_{1j} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_2} X_{2j} + \dots = \frac{\partial X_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{kj}}{\partial u_1} X_{1i} + \dots$$

et cela quel que soit  $h$ .

Je n'insiste pas sur la démonstration bien connue de la formule (2) en tant que formule nécessaire; je vais maintenant essayer de démontrer qu'elle est suffisante.

Je suppose d'abord que l'on ait seulement, quels que soient  $k$  et  $i$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_{k1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_1} X_{1i} + \dots + \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_m} X_{mi} \\ = \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_1} X_{11} + \dots + \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_m} X_{m1}. \end{cases}$$

Déterminons  $m$  fonctions  $u_1, u_2, \dots, u_m$  au moyen des équations différentielles ordinaires

$$du_1 = X_1 dx_{11} \quad du_2 = X_{21} dx_{11}, \quad \dots \quad du_m = X_{m1} dx_{11}.$$

en supposant  $x_2, \dots, x_n$  constants; désignons par  $u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0$  les valeurs de  $u_1, u_2, \dots, u_m$  pour  $x_1 = x_1^0$ ; ces valeurs pourront d'ailleurs être fonctions de  $x_2, x_3, \dots, x_n$ ; on aura alors

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \quad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \quad \dots \quad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1}.$$

Différentions ces équations par rapport à  $x_i$ , nous aurons des équations telles que

$$\frac{d^2 u_p}{dx_1 dx_i} = \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx_i} + \dots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} \frac{du_m}{dx_i},$$

où l'on doit supposer  $p = 1, 2, \dots, m$ . Cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_p}{dx_1 dx_i} &= \frac{\partial X_{p1}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} \left( \frac{du_1}{dx_i} - X_{1i} \right) + \dots \\ &+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} \left( \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi} \right) \\ &+ \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} X_{1i} + \dots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} X_{mi}, \end{aligned}$$

ou, en vertu de l'identité (3),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_p}{dx_1 dx_i} &= \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} \left( \frac{du_1}{dx_i} - X_{1i} \right) + \dots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} \left( \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi} \right) \\ &+ \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1} X_{11} + \dots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m} X_{m1}, \end{aligned}$$

ou, en vertu de (4 bis),

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_p}{dx_1 dx_i} &= \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_1} \left( \frac{du_1}{dx_i} - X_{1i} \right) + \dots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} \left( \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi} \right) \\ &+ \frac{\partial X_{pi}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx_1} + \dots + \frac{\partial X_{pi}}{\partial u_m} \frac{du_m}{dx_1}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left( \frac{du_p}{dx_i} - X_{pi} \right) \\ = \frac{\partial X_{p1}}{\partial u} \left( \frac{du_1}{dx_i} - X_{1i} \right) + \dots + \frac{\partial X_{p1}}{\partial u_m} \left( \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi} \right). \end{aligned}$$

On a ainsi  $m$  équations que l'on déduit de celle-ci en faisant  $p = 1, 2, 3, \dots, m$  : ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux  $m$  quantités

$$\frac{du_1}{dx_i} - X_{1i}, \quad \frac{du_2}{dx_i} - X_{2i}, \quad \dots, \quad \frac{du_m}{dx_i} - X_{mi}.$$



*k et i,*

$$\frac{\partial X_{k2}}{\partial x_i} + \sum_{\mu} \frac{\partial X_{k2}}{\partial u_{\mu}} X_{\mu i} = \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_2} + \sum_{\mu} \frac{\partial X_{ki}}{\partial u_{\mu}} X_{\mu 2},$$

*et ainsi de suite.*

*Pour intégrer le système (1), on intègre le système*

$$\frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \quad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \quad \dots, \quad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1},$$

*et l'on détermine les valeurs  $u_1^0, u_2^0, \dots$ , que prennent  $u_1, u_2, \dots$  pour  $x_1 = x_1^0$ , au moyen des équations*

$$\frac{du_1^0}{dx_2} = X_{12}^0, \quad \frac{du_2^0}{dx_2} = X_{22}^0, \quad \dots, \quad \frac{du_m^0}{dx_2} = X_{m2}^0,$$

*$X_{12}^0, \dots$  désignant les valeurs de  $X_{12}, \dots$  pour  $x_1 = x_1^0$ ; on détermine de même les valeurs  $u_1^{00}, u_2^{00}, \dots$  de  $u_1^0, u_2^0, \dots$  pour  $x_2 = x_2^0$ , au moyen des équations*

$$\frac{du_1^{00}}{dx_3} = X_{13}^{00}, \quad \frac{du_2^{00}}{dx_3} = X_{23}^{00}, \quad \dots, \quad \frac{du_m^{00}}{dx_3} = X_{m3}^{00},$$

*et ainsi de suite.*

On retrouve ainsi, mais par une tout autre voie, la règle donnée par M. Mayer pour l'intégration des équations aux différentielles totales. (A suivre.)

---