J. COLLIN

Sur le théorème de Rolle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 6 (1887), p. 266-268
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1887_3_6__266_1>

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. J. COLLIN,

Professeur de Mathématiques spéciales à l'École Saint-Charles.

Soit l'équation $f(x) = 0$, et soient a', b', ..., l' les racines de l'équation dérivée $f'_x = 0$.

Si l'on met l'équation proposée sous forme homogène et qu'on l'écrive

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{ou} \qquad xf'_x - yf'_y = 0,$$

l'application du théorème de Rolle peut être notablement simplifiée en beaucoup de cas à l'aide des théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour que deux racines de* $f'_x = 0$ *comprennent effectivement une racine de* $f(x,y) = 0$,

(1) On parvient beaucoup plus simplement aux mêmes résultats, par des considérations purement géométriques ; mais cela n'amoindrit en rien l'importance des méthodes intrinsèques, qui sont, avant tout, des méthodes d'*investigation*.

il faut et il suffit qu'elles comprennent entre elles un nombre impair de racines de $f''_y = 0$ (¹).

En effet, pour une valeur $d' \pm \varepsilon$ très voisine de l'une quelconque des racines d' de la dérivée f''_x, le polynôme $f(x, y)$ est de même signe que f'_y.

Théorème II. — *Pour que l'équation* $f(x, y) = 0$ *ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que : 1°* f''_x *et* f'_y *aient toutes leurs racines réelles ; 2° que pour* $x = \pm\infty$ *les polynômes* $f(x, y)$ *et* f'_y *soient de signes contraires l'un de l'autre ; 3° que, entre deux racines consécutives quelconques de* f''_x, *il y ait une racine et une seule de* f''_y.

1° Ainsi qu'on le sait, il faut que f'_x ait toutes ses racines réelles ; mais cela est tout aussi vrai de f'_y, ainsi qu'on le voit immédiatement en considérant la transformée aux inverses de l'équation proposée.

2° Si a' est la plus petite racine de f''_x, alors, pour $x = a' - \varepsilon$, les deux polynômes $f(x, y)$ et f''_y ont même signe ; donc, pour que $f(x, y) = 0$ ait une racine entre $-\infty$ et a', il faut et il suffit que $f(x, y)$ et f'_y soient de signes contraires pour $x = -\infty$. Même raisonnement pour l' et $+\infty$.

3° Il faut enfin que deux racines consécutives quelconques c' et d' de f''_x comprennent une racine et une seule de f'_y. En effet, si, dans l'intervalle de c' à d', il y avait 0 ou 2 racines de f''_y, il n'y en aurait aucune de l'équation proposée ; si, au contraire, il y avait trois racines de f'_y dans cet intervalle, alors d'autres intervalles manqueraient de racines de f'_y et par suite aussi de racines de l'équation proposée.

(¹) Souvent il sera plus facile et plus rapide de résoudre cette équation $f'_y = 0$ que de substituer les racines de f'_x dans $f(x, y)$.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, évidemment.

Application. — *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait toutes ses racines réelles.*

On a ici

$$f'_x = 3x^2 + p, \qquad f'_y = 2px + 3q.$$

Donc, il faut et *il suffit* que, d'une part, suivant les deux premières conditions, on ait

$$p < 0,$$

et que, d'autre part, suivant la troisième condition, on ait

$$3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2 + p < 0.$$

c'est-à-dire

$$27q^2 + 4p^3 < 0.$$

Cette dernière inégalité entraîne d'ailleurs la première et suffit à elle seule.

Remarque. — D'après ce qui précède, pour que l'équation $f(x, y) = 0$ ait toutes ses racines réelles, il suffit que f'_y ait $m - 2$ racines finies. Mais, si f'_y avait $m - 3$ racines finies et deux racines infinies, autrement dit si l'équation proposée $f(x, y) = 0$ manquait de deux termes entre le premier et le second, cette équation $f(x, y) = 0$ aurait au moins deux racines imaginaires.

On retrouve donc ainsi un corollaire connu du théorème des lacunes. Cela n'a d'ailleurs rien d'étonnant, car on sait que le théorème de Descartes n'est lui-même qu'un corollaire du théorème de Rolle.